RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 gennaio 1910.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sopra un'estensione della teoria dell'elasticità.* Nota del Socio Carlo Somigliana.

In alcuni lavori recentemente pubblicati [1] io ho studiato da un punto di vista puramente meccanico il problema dell'equivalenza fra azioni a distanza ed azioni propagantisi da punto a punto attraverso ad un mezzo elastico, e sono riuscito a dimostrare la possibilità di una tale equivalenza con una notevole generalità e senza alcuna ipotesi speciale sulla natura del mezzo. Ho inoltre notato che mediante l'ordinaria teoria dell'elasticità non è possibile un'applicazione dello stesso procedimento a campi di forze magnetiche, in quanto quella teoria è basata sull'ipotesi che nessuna reazione elastica si manifesti quando le molecole del corpo deformato sono sollecitate a ruotare, senza modificazioni di forma, mentre questo è appunto il modo di agire delle forze magnetiche, almeno secondo i concetti attualmente accettati.

Si presentava quindi come necessaria una estensione della teoria classica dell'elasticità.

[1] *Sulla teoria Maxwelliana delle azioni a distanza*, Rend. Acc. dei Lincei, 1907; *Sul problema statico di Maxwell*, Memorie id. id., 1909; *Sopra una rappresentazione meccanica di alcuni campi di forza*, Nuovo Cimento, ser. V, vol. XVII, 1909.

Ora l'opportunità di una tale estensione fu già indicata da parecchi elasticisti e fu anche studiata sotto punti di vista assai diversi ed a proposito di questioni anche non direttamente concernenti le proprietà elastiche dei corpi [1]. Tuttavia i risultati ottenuti non sono sempre concordanti nè dànno luogo ad una teoria definitiva; per cui mi è sembrato conveniente riprendere la questione per stabilire le equazioni differenziali nel modo più semplice e ricercare la forma speciale che esse assumono nel caso dell'isotropia.

Una tale ricerca può anche giustificarsi in quanto può essere applicata allo studio di alcune deformazioni che forse non sono state prese finora in diretta considerazione. Immaginiamo infatti un corpo magnetico immerso in un campo magnetico. Se esso è libero di muoversi intorno al suo centro di gravità assumerà una certa orientazione dipendente dal campo. Ma se noi con mezzi meccanici impediamo un tale movimento esso dovrà, in generale, deformarsi, anche astrazion fatta dal ben noto fenomeno della magnetostrizione. Una tale deformazione non può attribuirsi a forze agenti sugli elementi di massa, nè a forze superficiali, ma a momenti di rotazione agenti sugli elementi stessi, mentre la teoria elastica ordinaria presuppone che tali momenti non abbiano alcuna azione deformante.

Ci troviamo quindi di fronte ad una questione che non sembra possa trovare spiegazione cogli antichi concetti, e possiamo quindi sperare che la teoria di cui ci occupiamo sia suscettibile di una conferma sperimentale, e forse possa portare qualche contributo utile intorno al modo di agire delle forze magnetiche.

I. L'ipotesi che porremo a base delle nostre considerazioni è la più semplice che si possa fare per rappresentare il fatto che esistono reazioni elastiche alle rotazioni molecolari. Supporremo che l'energia elastica elementare unitaria W, dipenda, oltre che dalle sei componenti di deformazione, anche dalle tre componenti della rotazione elementare. Introduciamo le notazioni solite: u, v, w per le componenti dello spostamento,

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$y_z = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad z_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad x_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

(1) Senza discutere qui le varie teorie, citerò i lavori principali riferentisi a questo argomento: Voigt, *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle*, Abhand. K. Ges., Göttingen, 1887; Larmor. *The equations of Propagation of Disturbances in Girostatically Loaded Media and of the Circular Polarizzazion of Light*, Proc. London Math. Soc., 1891; Padova, *Interpretazione meccanica delle formole di Hertz*, Rend. Acc. dei Lincei, 1891; Lord Kelvin, *Baltimore Lectures*, London, 1904 (Lecture XX); Combiebac, *Sur les équations générales de l'élasticité*, Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XXX, 1902; E. J. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Paris, 1909.

per le componenti di deformazione, e indichiamo con r_x, r_y, r_z le componenti della rotazione elementare, moltiplicata per 2:

$$r_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad r_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad r_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'energia elastica W dipenderà, per quello che si è detto, da queste nove variabili ed una variazione qualsiasi di essa sarà data da una espressione della forma seguente:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \delta W = {} & W_1 \delta x_x + W_2 \delta y_y + W_3 \delta z_z + W_4 \delta y_z + W_5 \delta z_x + W_6 \delta x_y + \\ & + W_7 \delta r_x + W_8 \delta r_y + W_9 \delta r_z . \end{aligned}$$

Indichiamo con X, Y, Z le componenti unitarie delle forze di massa, con L, M, N le componenti unitarie delle forze superficiali, e con $2M_x$, $2M_y$, $2M_z$ le componenti unitarie dei momenti, che, secondo il concetto già indicato, possono eventualmente agire sugli elementi di volume. Indicando con ϱ la densità, con S il volume occupato dal corpo, con s la superficie, il principio dei lavori virtuali ci porta allora, per l'equilibrio, alla relazione seguente:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} & \int_S \varrho (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dS + \int_s (L\delta u + M\delta v + N\delta w)\, ds + \\ & \qquad + \int_S (M_x \delta r_x + M_y \delta r_y + M_z \delta r_z)\, dS - \int \delta W dS = 0 . \end{aligned}$$

Se in questa equazione sostituiamo il valore (1) di δW e trasformiamo coi soliti metodi gli integrali in modo da rendere lineari rispetto a δu, δv, δw le funzioni che compaiono sotto i segni d'integrazione, otteniamo subito che nello spazio S devono essere soddisfatte le seguenti equazioni, che vengono a sostituire le ordinarie equazioni indefinite dell'equilibrio elastico:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} & \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial (W_6 - W_9)}{\partial y} + \frac{\partial (W_5 + W_8)}{\partial z} + \varrho X + \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = 0 \\ & \frac{\partial (W_6 + W_9)}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial (W_4 - W_7)}{\partial z} + \varrho Y + \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial (W_5 - W_8)}{\partial x} + \frac{\partial (W_4 + W_7)}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} + \varrho Z + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = 0 . \end{aligned}$$

Per stabilire le equazioni che debbono essere soddisfatte alla superficie, conviene dapprima osservare che fra gli integrali di superficie provenienti dal primo membro della (2) vi è il seguente:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \int_s \Bigg[& \left(M_y \frac{\partial z}{\partial n} - M_z \frac{\partial y}{\partial n} \right) \delta u + \left(M_z \frac{\partial x}{\partial n} - M_x \frac{\partial z}{\partial n} \right) \delta v + \\ & + \left(M_x \frac{\partial y}{\partial n} - M_y \frac{\partial x}{\partial n} \right) \delta w \Bigg] ds . \end{aligned}$$

Ora noi abbiamo considerato i momenti M_x, M_y, M_z come agenti sugli elementi di volume dS, nè sappiamo quale significato si possa attribuire ai prodotti $M_x ds, M_y ds, M_z ds$. D'altra parte, come osserva il Voigt (Mem. cit., pag. 11) noi non conosciamo alcun mezzo sperimentale per produrre dei momenti di rotazione agenti sopra elementi superficiali, e conviene quindi per ora *considerare quei prodotti come nulli.*

Le equazioni alla superficie che si ottengono con questa ipotesi sono allora:

$$
(3')\qquad
\begin{aligned}
&W_1 \frac{\partial x}{\partial n} + (W_6 - W_9)\frac{\partial y}{\partial n} + (W_5 + W_8)\frac{\partial z}{\partial n} + L = 0 \\
&(W_6 + W_9)\frac{\partial x}{\partial n} + W_2 \frac{\partial y}{\partial n} + (W_4 - W_7)\frac{\partial z}{\partial n} + M = 0 \\
&(W_5 - W_8)\frac{\partial x}{\partial n} + (W_4 + W_7)\frac{\partial y}{\partial n} + W_3 \frac{\partial z}{\partial n} + N = 0 .
\end{aligned}
$$

Il sig. Combiebac (nel lavoro citato) conserva nelle equazioni al contorno i termini provenienti dall'integrale (4); il che, secondo un punto di vista puramente analitico, è sempre lecito. Però conviene osservare che in questo caso, oltre la difficoltà già accennata, non è possibile dedurre senza altro dalle (3′) le relazioni che dànno le espressioni delle componenti di tensione, relative ad un elemento superficiale qualsiasi. Infatti in queste equazioni noi possiamo identificare le L, M, N alle componenti di tali tensioni relative ad un elemento superficiale interno al corpo, come si fa ordinariamente, ma non sapremmo a quale grandezza meccanica identificare le M_x, M_y, M_z relative ad un tale elemento.

Nel caso nostro invece, ammettendo, come di solito, che un elemento superficiale interno sia in equilibrio sotto l'azione di due tensioni elastiche uguali ed opposte, ed indicando con X_n, Y_n, Z_n le componenti della tensione relativa all'elemento di normale n, dalle (3′) applicate ad elementi superficiali le cui normali siano parallele agli assi coordinati, troviamo subito

$$
\begin{array}{lll}
X_x = W_1 & Y_x = W_6 + W_9 & Z_x = W_5 - W_8 \\
X_y = W_6 - W_9 & Y_y = W_2 & Z_y = W_4 + W_7 \\
X_z = W_5 + W_8 & Y_z = W_4 - W_7 & Z_z = W_3
\end{array}
$$

e quindi ricordando che, pel teorema di lord Kelvin, δW deve essere un differenziale esatto, si hanno, fra le componenti di tensione e le derivate dell'energia le relazioni

$$
(5)\qquad
\begin{array}{lll}
X_x = \dfrac{\partial W}{\partial x_x} & Y_y = \dfrac{\partial W}{\partial y_y} & Z_z = \dfrac{\partial W}{\partial z_x} \\[2ex]
Y_z = \dfrac{\partial W}{\partial y_z} - \dfrac{\partial W}{\partial r_x} & Z_x = \dfrac{\partial W}{\partial z_x} - \dfrac{\partial W}{\partial r_y} & X_y = \dfrac{\partial W}{\partial x_y} - \dfrac{\partial W}{\partial r_z} \\[2ex]
Z_y = \dfrac{\partial W}{\partial y_z} + \dfrac{\partial W}{\partial r_x} & X_z = \dfrac{\partial W}{\partial z_x} + \dfrac{\partial W}{\partial r_y} & Y_x = \dfrac{\partial W}{\partial x_y} + \dfrac{\partial W}{\partial r_z} .
\end{array}
$$

Le differenze $Y_z - Z_y$, $Z_x - X_z$, $X_y - Y_x$ non sono quindi nulle, come nella teoria ordinaria, ma si ha

$$\tfrac{1}{2}(Z_y - Y_z) = \frac{\partial W}{\partial r_x} \;,\quad \tfrac{1}{2}(X_z - Z_x) = \frac{\partial W}{\partial r_y} \;,\quad \tfrac{1}{2}(Y_x - X_y) = \frac{\partial W}{\partial r_z}$$

e inoltre

$$\tfrac{1}{2}(Z_y + Y_z) = \frac{\partial W}{\partial y_z} \quad \tfrac{1}{2}(X_z + Z_x) = \frac{\partial W}{\partial z_x} \quad \tfrac{1}{2}(Y_x + X_y) = \frac{\partial W}{\partial x_y} .$$

È questa, a nostro avviso, la forma più semplice che può assumere la teoria delle tensioni elastiche e dell'equilibrio quando si ammetta che la energia venga a dipendere anche dalle componenti di rotazione.

II. Si presenta ora la questione di determinare le varie espressioni che spettano alla funzione W (per la quale si assume, per ben note ragioni, una forma quadratica) quando il materiale elastico ammette degli elementi di simmetria.

Non tratterò la quistione in generale, sebbene essa non presenti alcuna difficoltà teorica; mi limiterò, per brevità, a considerare il caso che esista un asse di isotropia, per dedurne poi l'espressione di W, che è la più interessante, quella corrispondente al caso dell'isotropia completa.

Le formole di trasformazione per le sei componenti di deformazione, quando gli assi coordinati ruotano di un angolo α intorno all'asse delle z, si possono scrivere nella forma seguente, da me usata in varie occasioni (¹)

$$\begin{array}{lll}
(a) & x'_x - y'_y + i x'_y = e^{2i\alpha}(x_x - y_y + i x_y) & \\
(b) & x'_x + y'_y = x_x + y_y & \\
(c) & z'_x + i z'_y = e^{i\alpha}(z_x + i z_y) & i = \sqrt{-1} \\
(d) & z'_z = z_z &
\end{array}$$

mentre per quelle relative alle rotazioni si ha

$$\begin{array}{ll}
(e) & r'_x + i r'_y = e^{i\alpha}(r_x + i r_y) \\
(f) & r'_z = r_z .
\end{array}$$

Si decompongono così in tre sostituzioni ortogonali di tre variabili sotto forma canonica. La W dovrà, nel caso della isotropia assiale, essere formata linearmente colle espressioni quadratiche invariantive per una rotazione arbitraria attorno all'asse delle z, posto di scegliere questo asse come asse di isotropia. Tali espressioni si ottengono eliminando α fra le relazioni precedenti e le loro coniugate. Si trovano così, come è ben noto, cinque inva-

(¹) *Sul potenziale elastico*, Annali di Matematica, 1901.

rianti quadratici (di rotazione) formati colle sei componenti di deformazione, cioè

$$I_1 = (x_x + y_y)^2 \qquad I_2 = z_z^2 \qquad I_3 = (x_x + y_y)\, z_z$$
$$I_4 = z_x^2 + z_y^2 \qquad I_5 = (x_x - y_y)^2 + x_y^2 .$$

Restano ora da trovarsi gli invarianti che dipendono anche da r_x, r_y, r_z.

Dalle (b) (d) (e) (f) risultano subito gli invarianti quadratici

$$R_1 = r_x^2 + r_y^2 \qquad R_2 = r_z^2 \qquad R_3 = r_z z_z \qquad R_4 = (x_x + y_y)\, r_z .$$

Per moltiplicazione dalle (c) e dalla coniugata della (e) si ha inoltre

$$(z'_x + i z'_y)(r'_x - i r'_y) = (z_x + i z_y)(r_x - i r_y)$$

da cui risultano gli altri due invarianti

$$R_5 = z_x r_x + z_y r_y \qquad R_6 = z_y r_x - z_x r_y .$$

Non è difficile vedere che dalle combinazioni delle relazioni precedenti non è possibile dedurre altre formazioni invariantive e possiamo quindi concludere:

La energia elastica W, *nell'ipotesi che essa dipenda dalle sei componenti di deformazione e dalle tre componenti di rotazione, quando esiste un asse d'isotropia, è funzione lineare dei cinque invarianti* I, *e dei sei invarianti* R, *ora determinati. Conterrà quindi undici coefficienti.*

È assai facile ora dedurre da questa espressione quella dell'isotropia completa, dovendo tale espressione essere un caso speciale della prima.

È noto che quando W non contiene r_x, r_y, r_z si riduce, nel caso dell'isotropia, ad una funzione lineare dei due invarianti

$$(x_x + y_y + z_z)^2 \quad , \quad x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2).$$

Basterà quindi considerare la parte di W che è formata cogli invarianti R. Scrivendola sotto la forma

$$c_1 R_1 + c_2 R_2 + c_3 R_3 + c_4 R_4 + c_5 R_5 + c_6 R_6$$

essa dovrà rimanere inalterata scambiando fra loro comunque gli assi. Scambiando gli assi delle z e delle x, si vede facilmente che dovrà essere

$$c_1 = c_2 \qquad c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$$

e che perciò deve ridursi alla forma

$$c_1(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)$$

la quale è evidentemente isotropa.

Concludiamo quindi:

La forma generale dell'energia W, quando dipende dalle componenti di deformazione e di rotazione, nel caso dell'isotropia è formata linearmente con tre invarianti e può porsi sotto la forma:

$$2W = \lambda(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\mu(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2) + \\ + \nu(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2).$$

In questa espressione alle condizioni solite per la positività di W, dovremo aggiungere l'altra

$$\nu \geq 0.$$

Le equazioni a cui dà luogo questa forma dell'energia elastica si ottengono immediatamente.

Osserviamo dapprima che per le componenti delle tensioni le (5) dànno

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu x_x \qquad Y_y = \lambda\theta + 2\mu y_y \qquad Z_z = \lambda\theta + 2\mu z_z$$

ove θ indica la dilatazione cubica.

Queste componenti quindi non differiscono dalle ordinarie. Per le altre si ha

$$\begin{aligned} Y_z &= \mu y_z - \nu r_x & Z_y &= \mu y_z + \nu r_x \\ Z_x &= \mu z_x - \nu r_y & X_z &= \mu z_x + \nu r_y \\ X_y &= \mu x_y - \nu r_z & Y_x &= \mu x_y + \nu r_z \end{aligned}$$

e le equazioni indefinite d'equilibrio (5) si riducono alla forma seguente:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + (\mu + \nu)\left(\frac{\partial r_y}{\partial z} - \frac{\partial r_z}{\partial y}\right) + \varrho X + \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + (\mu + \nu)\left(\frac{\partial r_z}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial z}\right) + \varrho Y + \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + (\mu + \nu)\left(\frac{\partial r_x}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial x}\right) + \varrho Z + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = 0.$$

Le equazioni (3′) al contorno, con le solite riduzioni, divengono

$$\lambda\theta\frac{\partial x}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial n} + (\mu - \nu)\left(r_z\frac{\partial y}{\partial n} - r_y\frac{\partial z}{\partial n}\right) + L = 0$$

$$\lambda\theta\frac{\partial y}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial n} + (\mu - \nu)\left(r_x\frac{\partial z}{\partial n} - r_z\frac{\partial x}{\partial n}\right) + M = 0$$

$$\lambda\theta\frac{\partial z}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial n} + (\mu - \nu)\left(r_y\frac{\partial x}{\partial n} + r_x\frac{\partial y}{\partial n}\right) + N = 0.$$

Diverse considerazioni si possono fare intorno a queste equazioni generalizzate dell'equilibrio nel caso dell'isotropia. Ci limiteremo a notare che la forma analitica della parte dei primi membri che dipende da u, v, w non differisce dalla ordinaria. Esse ammettono quindi quelle soluzioni singolari mediante le quali è possibile arrivare alla rappresentazione generale dei loro integrali mediante integrali definiti. Segue da ciò la possibilità di estendere ai campi magnetici di forza i metodi stessi coi quali è possibile ottenere la rappresentazione mediante tensioni elastiche dei campi ordinarî, ed arrivare così alla soluzione generale del problema di cui abbiamo parlato da principio.

In secondo luogo noteremo che le equazioni precedenti, anche quando i momenti M_x, M_y, M_z sono nulli, se la costante ν è differente da zero, non si riducono a quelle ordinarie. Quindi per corpi, pei quali questo fatto si verifica, le leggi di deformazione potranno essere differenti da quelle dedotte dalla teoria ordinaria anche quando le cause della deformazione sono le solite forze o tensioni superficiali.

Questa circostanza potrà forse facilitare la ricerca che si presenta ora spontanea, quella cioè di vedere se esistano in natura materiali, per i quali il coefficiente ν sia differente da zero e, nell'ipotesi favorevole, immaginare dei procedimenti sperimentali atti a determinare i valori di un tale coefficiente.

Astronomia. — *Osservazioni astronomiche e fisiche sulla topografia e costituzione del pianeta Marte fatte nella specola Reale in Milano coll'equatoriale Merz-Repsold durante l'opposizione del 1890.* Memoria VII^a del Socio G. V. Schiaparelli.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Il Segretario Millosevich nel presentare la VII^{ma} Memoria del Socio Senatore Giovanni Schiaparelli riguardante le osservazioni e i disegni fatti nell'apparizione del 1890. rileva l'opera insigne compiuta dallo Schiaparelli dal 1827 in poi nei riguardi di Marte e ricorda che, volendo suddividere in periodi le nostre cognizioni sul disco del pianeta, il periodo Schiaparelliano resterà sempre il più insigne come quello che ci rivelò sul disco minimi particolari, i quali pur potranno essere in avvenire più minutamente analizzati e decomposti. L'Accademia dopo alcune parole del Socio F. Mariotti e del Vicepresidente F. D'Ovidio, le quali lumeggiano la grande figura dell'astronomo di Savigliano, delibera d'inviare un telegramma di ringraziamento al Socio Schiaparelli per avere offerto alla nostra Accademia l'ultima sua Memoria sulle sue ricerche sul disco di Marte.

Biologia — *Osservazioni intorno al fenomeno della rudimentazione nei Fillosserini* (Nota 23ª). Nota del Socio B. Grassi.

Nelle fillosserine si incontrano di frequente interessanti casi di rudimentazione, i quali furono oggetto di ricerche speciali, oltre che da parte mia, da parte anche della mia assistente dott.ª A. Foà e della mia allieva dott.ª B. Bonfigli.

Trattasi di riduzioni, evidentemente collegate alla vita parassitaria. Tra esse sono vistose due:

I) quella delle ali;

II) quella del tubo digerente.

Per un adeguato valutamento sì dell'una che dell'altra occorre tener presenti tutti gli *Aphidina* (ricordo che questa superfamiglia dividesi in tre famiglie *Coccidae*, *Aphididae* e *Chermesidae*, la quale ultima comprende due sottofamiglie: *Chermesinae* e *Phylloxerinae*).

Nei sessuali delle *Phylloxerinae* mancano stiletti e labbro inferiore; il tubo intestinale esiste, ma impervio alle estremità sì anteriore che posteriore. Notasi che i sessuali hanno invece un apparato digerente capace di funzionare nelle *Chermesinae* e in una gran parte delle *Aphididae* (una piccola parte di queste comportasi come le *Phylloxerinae*).

Per quanto finora ho veduto, la riduzione del tubo digerente è giunta press'a poco allo stesso grado non soltanto in tutti gli individui di una determinata specie, ma anche in tutte le specie da noi studiate.

Tra i fatti che possono concorrere a spiegare questa riduzione, ricordo i seguenti:

1° che non abbiamo mai trovato alcuna fillossera coll'ano pervio, qualunque fosse lo stadio e la forma presa in esame;

2° che la fillossera sessupara, giunta al periodo adulto (definitivo), cioè dopo le quattro mute, può riprodursi senza essersi nutrita. Ciò abbiamo accertato per le alate della Fillossera (*Viteus*) della vite, della *Ph. quercus*, della *Paraphylloxera glabra*, della *Acanthaphis spinulosa*; alcuni individui furono però veduti qualche volta fissati col rostro, non sappiamo se per trovare appoggio, come fanno le ibernanti, ovvero allo scopo di nutrirsi. L'*Acanthochermes quercus* poi, che fa le uova di sessuali in abito di attera sessupara, certamente non si nutre mai. Eppure tutte le alate e le attere sessupare hanno rostro e intestino capaci di funzionare, per quanto si può giudicare da un esame sommario.

L'ano è chiuso evidentemente in rapporto alla qualità del nutrimento assunto dall'animale, e ciò non fa meraviglia; sorprende molto invece la presenza di tutto il digestorio in forme, che non assumono cibo, mentre si aspetterebbe di trovarlo in via di riduzione.

Per intavolare intorno a questi fenomeni una esauriente discussione, occorrerebbe però anche determinare la presenza, o l'assenza di succhi digerenti, ma ciò non è possibile senza ricorrere a difficilissime ricerche fisiologiche; perciò preferisco rivolgere l'attenzione all'altro gruppo di rudimentazioni, cioè alla riduzione delle ali, comitata da altre riduzioni.

Nell'*Acanthochermes quercus* non esistono che attere sessupare in abito larvale. Nella *Phylloxerella confusa*, nella *Phylloxerina salicis*, nello *Pseudochermes populi*, troviamo una simile condizione di cose, però le forme adulte sono in parte virginopare e in parte sessupare. Nelle altre fillossere esistono attere e alate; le attere in generale virginopare, le alate virginopare e sessupare, o solo sessupare. I sessuali di tutte le forme, eccezione fatta dell'apparato boccale, hanno molti caratteri comuni colle attere sessupare o virginopare. È importante ricordare che, per arrivare all'alata occorrono quattro mute, e altrettante per arrivare alle attere virginopare, o sessupare, o ai sessuali, il che dimostra che in nessun caso siamo davanti a vere larve che diventano sessualmente mature (progenesi). Secondo la teoria dell'evoluzione, dobbiamo ritenere *a priori* che tutte le qui denominate forme originariamente abbiano avute le ali e secondariamente le abbiano perdute. La proposizione inversa che, cioè, originariamente non abbiano avuto ali, sembra infatti inverosimile perchè se è vero che in tutte le *Chermesidae* i sessuali sono sforniti di ali, troviamo però maschi forniti di ali nelle affini *Aphidinae* (sempre) e *Lachninae* (ora sì, ora no) ecc.; e d'altra parte in molte altre *Phylloxerinae*, come nelle *Chermesinae*, troviamo sessupare e talora anche virginopare fornite di ali.

Un interesse speciale nelle *Phylloxerinae* è destato da circostanze, le quali tendono a far ritenere che il fenomeno sia ancora in corso, che, cioè, noi in certo modo assistiamo alla riduzione e scomparsa delle ali. Queste circostanze sono le seguenti: si trovano nelle *Ph. quercus* rare alate virginopare e sessupare (queste tra le ultime sviluppatesi sulle querce a foglie caduche), aventi ali interamente sviluppate, ben spiegate, ma piccoline. Altre volte le ali restano raggrinzate e l'animale non può volare; il fenomeno, eccezionale nella *Ph. quercus*, diventa costante nelle alate sessupare della *Paraphylloxera glabra* figlie della fondatrice, mentre torna ad essere eccezionale, fino a mancare del tutto nelle nipoti, pronipoti ecc.

Partendo da questo estremo — insetto perfetto colle ali interamente sviluppate, ma non ben distese e incapaci del volo — arriviamo alle sessupare e virginopare attere attraverso moltissime forme, che diventano adulte in abito più o meno spiccatamente di ninfe e che per brevità denominiamo *ninfali*.

Avanti di scendere ai particolari noto: 1) che le forme ninfali compaiono in tutte le fillossere da noi studiate aventi forme alate; 2) che in alcune specie sono sessupare, in altre virginopare (*Acanthaphis spinulosa*, *Viteus vastator*, almeno nella massima parte, e *Phylloxera quercus*; 3) che subiscono quattro mute come tutte le altre forme, attere, alate, o sessuali;

4) che in generale una singola forma ninfale fa un numero di uova minore di quello della virginopara attera e maggiore di quello dell'alata sessupara.

Il fenomeno, che caratterizza le ninfali, è la progenesi, cioè l'anticipata maturazione degli organi sessuali, sia che si tratti di sessupare, sia che si tratti di virginopare; questa può avvenire nelle più svariate epoche, cioè da quando non c'è ancora alcun carattere ninfale a quando l'animale è già quasi alato perfetto. Si può dire che, a seconda che l'anticipazione è grande, mediocre, piccola o minima, si conservano caratteri di larva, di preninfa, di ninfa giovane, di ninfa vicina a diventare insetto perfetto, o infine non mancano caratteri di insetto perfetto. Così possono le forme in discorso avere tutti i caratteri larvali, ovvero alludere alla ninfa soltanto per le antenne più lunghe, carattere a cui possono aggiungersi soltanto alcune faccette (rappresentanti ommatidi) dell'occhio composto, ovvero un maggior numero di faccette e traccia delle ali, ovvero faccette sempre più numerose, anche ocelli e accenno delle ali più sviluppato ecc., fino ad avere individui col terzo articolo delle antenne fornito di due rinari, coi peli e coi sensilli delle ali, colla testa, col torace, coll'addome, colle zampe ecc., in tutto come nelle alate, da cui si differenziano perciò quasi soltanto per le ali ridotte a monconi.

Si danno delle differenze, che, per quanto abbiamo veduto, hanno valore specifico, così nella *Ph. quercus* precede lo sviluppo degli ocelli a quello degli occhi composti e quindi anche delle ali. Nella *Moritziella corticalis* può trovarsi il torace in condizioni, che si avvicinano a quelle dell'alata, senza traccia di ali, con ocello impari ecc.

In una singola specie possono verificarsi eccezionali arresti di sviluppo, così può mancare l'accenno delle ali anteriori, o di quelle posteriori, ovvero possono manifestarsi dissimmetrie (due rinari al terzo articolo dell'antenna da un lato e uno dall'altro; un numero differente di faccette nell'occhio composto da un lato e dall'altro). Singolare è il fatto che dall'ultima muta (quarta) può venir fuori un individuo coi monconi delle ali più corti.

È utile qui distinguere le varie forme delle *Phylloxerinae* in tre gruppi (lasciando da parte i sessuali che, come ho detto, sono tutti atteri):

I) le forme di una data specie si possono giudicare diventate tutte definitivamente attere (*Acanthochermes*, *Phylloxerella confusa* ecc.);

II) una forma di tutte le specie si può giudicare diventata definitivamente attera (la fondatrice); un'altra forma quasi diventata definitivamente attera (virginopara attera);

III) altre forme delle stesse specie sembrano avviate a diventare attere (ninfali sessupare, o virginopare).

Sorge ora la domanda se e come la scomparsa delle ali riesca di giovamento alle fillosserine. Non può cadere dubbio che sia stato favorevole alla propagazione della specie *la perdita delle ali limitata a certe forme*, destinate a sfruttare l'abbondanza di nutrimento fornito dalla pianta ospite; esse hanno acquistata maggiore prolificità, più rapidamente raggiungono lo

stadio definitivo e non si espongono ai pericoli della cattiva stagione. Di qui però al dimostrare l'utilità della scomparsa completa, o della tendenza alla scomparsa completa di *tutte* le alate, molto ci corre.

Potrebbe forse desumersi l'utilità o meno delle ali dalla diffusione delle varie specie?

A tutta prima tenendo presente la grande diffusione della *Ph. glabra*, della *Ph. quercus*, dell'*A. spinulosa*, specie (con forme alate), che noi abbiamo trovate dappertutto nell'Italia media e la relativa limitazione dell'*A. quercus* (senza alate) che per es. non abbiamo trovato a Fauglia e del *Ph. italicum* (con rarissime alate) che nell'Agro Romano abbiamo trovato solo al Bivio di Grottaferrata, e che non abbiamo trovato in Toscana, ci sembrerebbe di poter conchiudere che le specie con alate fossero più diffuse; ma la *Ph. salicis* è altrettanto diffusa, pur non avendo alate, mentre l'affine *Ps. populi* del pari senza alate è molto meno diffuso. Tenendo presente anche tutte le altre specie, si può conchiudere che dal criterio della diffusione non si può dedurre certamente l'utilità della scomparsa delle ali.

Si può tentare di considerare il vantaggio, o meno, della presenza delle ali sotto un altro aspetto, mettendolo, cioè, in rapporto col già accennato andamento della stagione. Così, per citare un esempio, quest'anno, per la stagione piovosa e i forti venti a Roma pochissime alate virginopare arrivarono a passare dai lecci alle querce; in questo caso le ali sono state dannose alla specie, senonchè l'anno scorso il tempo è stato quasi sempre bello e le alate hanno infettato molto le querce. Evidentemente anche questo secondo argomento non riesce perciò più decisivo del primo.

Si può supporre che le ali scompaiano a preferenza in quelle forme che si propagano poco e perciò hanno meno bisogno di passare da una pianta all'altra e che invece le ali si conservino in quelle forme che, riproducendosi molto copiosamente, in breve tempo invadono tutta la pianta e sentono la necessità di migrare; purtroppo vi sono fatti che non si accordano con queste presunzioni, così per es. il *Ph. italicum* si propaga moltissimo e pur non presenta alate che molto eccezionalmente.

Si potrebbe obbiettare che non è giusto di tener conto soltanto delle alate, molti altri fenomeni (es. la diffusione delle Fillosserine per mezzo delle prime larve, la conservazione di anno in anno per mezzo delle ibernanti, le varie cause nemiche) potendo influire sull'abbondanza o meno degli individui di una data specie. È un fatto però che noi oggi conosciamo le nostre fillosserine in modo sufficiente per poter valutare anche queste circostanze. Orbene, tutto ponderato, non possiamo azzardarci a conchiudere che quella tendenza alla soppressione delle alate, a cui accenna il ciclo evolutivo delle varie fillossere, debba con sodo fondamento venir giudicata utile, e fa molto meraviglia che ci venga meno il criterio utilitario in questo caso, ove si sarebbe creduto di trovarlo evidente.

Il fenomeno che abbiamo esposto, cioè la maturazione sessuale degli in-

dividui più o meno precoce, trova riscontro in quanto avviene nei Termiti; quivi però l'utilità della riduzione delle ali è evidentissima, perchè altrimenti, la colonia di *Calotermes flavicollis* non riparerebbe alla perdita del re e della regina con re e regina di supplemento e i *Termes lucifugus*, le cui alate vanno tutte irremissibilmente perdute, si estinguerebbero.

Passiamo ora ad apprezzare i differenti gradi di rudimentazione che sopra abbiamo segnalato in una medesima specie.

Non si può parlare di graduale scomparsa per effetto del fattore Lamarckiano, ossia del disuso, e ciò, dopo le spiegazioni che ho più sopra fornite, è evidente senza che occorrano commenti; si può anzi osservare che fra i casi, in cui la spiegazione della riduzione per effetto del disuso, si esclude con certezza, questo delle ali dei fillosserini è certamente uno decisivo. Che se invece del Lamarckismo invochiamo il Weismannismo (selezione germinale), subito ci accorgiamo che anch'esso non rende conto del fenomeno. Ciò che si verifica nelle ali delle Fillosserine non è una variazione dei supposti determinanti — per effetto della selezione germinale — in continua oscillazione discensionale, non è una corrente discendente di ulteriori variazioni, rappresenta invece qualcosa di saltuario. Non so se il Weismann sottilizzando potrebbe trovare modo di far rientrare in apparenza anche questa saltuarietà nella selezione germinale; io però sono convinto che egli dovrebbe certamente violentare i fatti per aggregarli alla sua teoria!

Nei casi di dimorfismo e polimorfismo degli insetti sociali, o no, il Weismann invoca la pluralità di idi e l'influenza del nutrimento come stimolo che attivi l'uno o l'altro ido. Nel caso delle Fillosserine questa molteplicità di idi sembra esclusa dall'esistenza di tutte le possibili forme intermedie tra le larve e le alate.

Lascio perciò in disparte il disuso e la selezione germinativa, ossia i rami che allungansi verso le cause finali e tento una spiegazione del fenomeno d'ordine molto differente. A me sembra che la questione degli organi rudimentali prenda un aspetto positivo quando si può dominarli come nel caso attuale, colla fisiologia dello sviluppo. Certamente non possiamo andare al di là di un certo limite e dare una precisa analisi del fenomeno, ma possiamo almeno porre la questione in forma sperimentale, che è il miglior modo di renderla accessibile.

Premettiamo che in tutte le forme di *Chermesidae* (a noi note), comprese le alate, l'ultima muta, che è quella la quale conduce all'apertura della vulva, è preceduta da un breve periodo in cui le uova rapidamente ingrandiscono. Potrebbe darsi che questo accrescimento delle uova la occasionasse. Sta inoltre il fatto che quando avviene questo rapido ingrandire delle uova — indipendentemente dal prodursi uova maschili, femminili o partenogeniche —, gli altri organi, se non hanno già raggiunto lo sviluppo completo, si arrestano a quel punto a cui si trovano, e perciò ci si presentano tanto più incompleti, quanto più precocemente avviene l'accrescimento delle uova. Spie-

ghiamoci in modo più preciso con un esempio. Supponiamo una ninfa che non abbia ancora gli ocelli e che abbia l'occhio composto fornito di pochissime faccette e un breve accenno delle ali; gli ovarii che erano ancora lontani dalla maturazione e che fino a quel momento si erano andati sviluppando lentamente, per effetto di stimoli provenienti dall'esterno, rapidamente ingrandiscono, sottraendo alimento o almeno certe sostanze alle altre parti; questo fenomeno occasiona la quarta muta, prima che i varî organi siano evoluti come nelle alate e li arresta definitivamente nel loro sviluppo. Così si comprende quel singolare arresto nei più differenti gradi di sviluppo, che a tutta prima non sembrerebbe spiegabile altrimenti che col disuso. Esso devesi dunque ritenere occasionato dall'ingrandimento rapido delle uova, che alla sua volta deve essere provocato da stimoli esterni (modificazioni delle qualità del nutrimento fornito dalla pianta al parassita). Siccome, contemporaneamente al crescere delle uova, si completano i gonodotti, fors'anche questi concorrono a determinare l'arresto di sviluppo.

La tesi da me qui sostenuta è applicabile in generale a tutte le rudimentazioni, non ne sono però occasione sempre e solo gli organi genitali.

Già nel caso dei sessuali delle Fillosserine è meno evidente che anche la scomparsa degli stiletti, del labbro inferiore, della pompetta salivare ecc. siano riferibili alle gonadi, perchè questi organi si sviluppano precocemente, prima che la larva esca dall'uovo. In altri casi poi (es. dissogonia) devesi addirittura escludere che la maturazione delle gonadi provochi un arresto di sviluppo degli altri organi.

Formulo pertanto come segue la interpretazione che io do ai fenomeni di rudimentazione. Ad un certo momento, per effetto di stimoli esterni o interni, comparisce o ingrandisce un organo, provocando un arresto di sviluppo di altri; ciò accade probabilmente secondo regole, che la fisica, la chimica, o la chimica-fisica potranno un giorno analizzare con grande soddisfazione della nostra mente. Così si spiega la rudimentazione senza il disuso. Si può dare un'analoga spiegazione della comparsa, o del perfezionamento degli organi nuovi? La questione è molto più ardua e, se definita negativamente, potrebbe a sua volta perfino sollevare dei dubbî sulla giustezza della spiegazione da noi data alla rudimentazione. Ma qui mi si affaccia un terreno, sul quale il mio piede sdrucciola, e perciò io non voglio inoltrarmi.

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso.* Nota II del Corrispondente E. Almansi.

1. Ricordo la formula stabilita in una Nota precedente.

Suppongo che una massa liquida M, di densità ϱ, in moto, occupi interamente lo spazio S compreso fra la superficie σ di un corpo fisso S_0, ed un'altra superficie, pure fissa, σ'. Sulle particelle di M non agiscono forze di massa.

Chiamo p la pressione, al tempo t, in un punto qualunque di S; e considero la quantità

(1) $$A = \int_\sigma p\lambda d\sigma,$$

λ essendo una funzione definita nei punti di σ, che soddisfa alla condizione

(2) $$\int_\sigma \lambda d\sigma = 0 .$$

Dette u, v, w le componenti di velocità al tempo t, pongo:

$$U = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \tfrac{1}{2} V^2,$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} ,$$

$$f = v\zeta - w\eta \quad , \quad g = w\xi - u\zeta \quad , \quad h = u\eta - v\xi ,$$

(2) $$D = f \frac{\partial \varphi}{\partial x} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} + h \frac{\partial \varphi}{\partial z} ,$$

$$Q = u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} ,$$

ove φ rappresenta una funzione armonica e regolare nello spazio S, che nei punti di σ e σ' verifica rispettivamente le equazioni

(3) $$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lambda \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

n denotando la normale che penetra in S.

Potranno esservi in S, al tempo t, delle superficie su cui il moto è discontinuo. Chiamo ω l'insieme di tali superficie; n, in un punto qualunque di ω, la normale uscente da una faccia assunta come positiva; α, β, γ i suoi coseni direttori; N la componente $u\alpha + v\beta + w\gamma$ della velocità secondo n.

Suppongo che nei punti di ω i valori di U e Q siano presi sulla faccia positiva; chiamo invece U', Q' i valori delle quantità analoghe sulla faccia negativa. Pongo:

$$H = (Q - Q')\, N - (U - U') \frac{\partial \varphi}{\partial n} .$$

Si ha allora:

(4) $$A = \varrho \left(- \int_\sigma U\lambda\, d\sigma + \int_\omega H\, d\omega - \int_S D\, ds \right) .$$

In questa Nota dedurrò alcune conseguenze dalla formula (4), la quale ci fornisce il valore di A al tempo t, espresso mediante quantità che dipendono solo da u, v, w (non dalle loro derivate rispetto al tempo), e quantità indipendenti dal movimento della massa liquida.

2. Sieno, al tempo t, u_1, v_1, w_1 le componenti di velocità relative ad un movimento μ_1; e consideriamo un altro movimento μ a cui corrispondano le componenti di velocità

$$u = cu_1 \quad , \quad v = cv_1 \quad , \quad w = cw_1 ,$$

ove c rappresenta una costante (positiva o negativa). Esso sarà un movimento possibile, se tale è μ_1. Le superficie di discontinuità, se esistono, saranno le stesse nei due movimenti.

Le quantità $\xi , \eta , \zeta , Q , N$, relative al movimento μ, si otterranno moltiplicando per c le quantità analoghe relative a μ_1; mentre le quantità U , f , g , h , D , H, relative a μ, si otterranno moltiplicando le analoghe, relative a μ_1, per c^2.

La quantità A relativa a μ (e ad una determinata funzione λ), sarà dunque eguale a $c^2 A_1$, essendo A_1 la quantità analoga relativa a μ_1. Onde avremo, se V e V_1 rappresentano le grandezze della velocità in uno stesso punto di S, nei due movimenti:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{V^2}{V_1^2} .$$

Noi potremo chiamare *simili* tutti i movimenti μ che si ottengono facendo variare la costante c; ed avremo perciò il teorema:

I valori di A *relativi a movimenti simili, stanno fra loro come i quadrati delle velocità in uno stesso punto della massa in moto.*

In particolare il teorema varrà per le componenti della forza F e del momento G resultanti del sistema di forze $p\,d\sigma$, esercitate dalla massa liquida in moto sugli elementi di σ. Dunque la direzione *e il verso* di F (e tutto ciò che diciamo di F vale per G) sono gli stessi per movimenti simili; le grandezze stanno fra loro come i quadrati delle velocità in un medesimo punto.

Supponiamo $c = -1$, consideriamo cioè, al tempo t, insieme con μ_1, il movimento μ ottenuto invertendo le velocità delle singole particelle liquide. *Il vettore* F *sarà identico nei due movimenti.*

Introduciamo un vettore W atto a rappresentarci, in grandezza, direzione e verso, la *corrente* che investe il corpo S_0. Come componenti di W assumeremo, per un movimento generico $(u\,v\,w)$, i valori medii

$$W_x = \frac{\int_\sigma u\,d\sigma}{\sigma} , \text{ ecc.,}$$

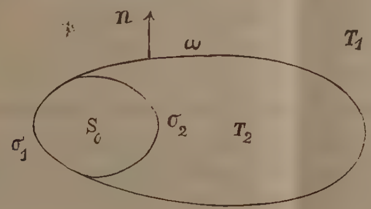
di u , v , w, sulla superficie σ di S_0.

Invertendo il movimento, il vettore W cambia di verso, mentre F rimane inalterato. Dunque: *o la spinta* F, *esercitata dalla massa liquida in moto sul corpo* S_0, *è nulla o normale alla direzione della corrente, in ambedue i movimenti; ovvero, in uno dei due, essa forma colla corrente* (supposta diversa da zero) *un angolo acuto.*

Noi possiamo considerare questo resultato (valido per movimenti continui e discontinui) come l'espressione più generale del *paradosso di D'Alembert*.

3. Esamineremo ora un caso particolare di movimento della massa liquida.

Si abbia, al tempo t, una superficie ω di discontinuità, che divida lo spazio S in due regioni T_1, T_2. La regione T_1 sia limitata dalla superficie chiusa σ' (che limita, con σ, l'intero spazio S), da ω, e da una parte σ_1 della superficie σ. Diciamo σ_2 la rimanente parte di σ. Nella regione T_1 il moto sia irrotazionale. Nella regione T_2 sia (al tempo t), $u = v = w = 0$. Cerchiamo in questo caso l'espressione di A.



Come faccia positiva di ω assumeremo quella che è rivolta verso T_1.

Mancando i vortici ($\xi = \eta = \zeta = 0$), sarà, in tutto lo spazio S, $D = 0$; quindi, per la formula (4):

$$A = \varrho \left(- \int_\sigma U \lambda \, d\sigma + \int_\omega H d\omega \right).$$

Poichè al tempo t le particelle di T_2 sono in quiete, sulla parte σ_2 di σ sarà $U = 0$; e sulla superficie ω, $N = 0$, $U' = 0$, e perciò

$$H = - U \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

ove U denota il semi-quadrato della velocità delle particelle liquide attigue ad ω, che appartengono a T_1. Avremo dunque:

$$A = \varrho \left(- \int_{\sigma_1} U \lambda \, d\sigma_1 - \int_\omega U \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega \right);$$

ovvero, chiamando Ω l'intera superficie chiusa formata da ω e σ_1, e ricordando che sopra σ_1 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ è uguale a λ:

$$A = - \varrho \int_\Omega U \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega,$$

od anche:

$$A = - \tfrac{1}{2} \varrho \int_\Omega V^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega,$$

formula che si riduce alla (3) della Nota I quando Ω venga a coincidere con σ: quando, cioè, il moto sia continuo e irrotazionale in tutto lo spazio S.

Poichè la funzione φ è armonica e regolare nello spazio S, e in particolare nella regione T_1 limitata dalle superficie σ' ed Ω, sulla prima delle quali si ha $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$, sarà

$$\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Omega = 0\,;$$

onde avremo pure, indicando con V_0 una costante arbitraria:

$$A = \tfrac{1}{2}\varrho \int_\Omega (V_0^2 - V^2)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Omega\,; \tag{5}$$

e se torniamo a scindere in due l'integrale esteso ad Ω:

$$A = \tfrac{1}{2}\varrho \int_{\sigma_1} (V_0^2 - V^2)\,\lambda d\sigma_1 + \tfrac{1}{2}\varrho \int_\omega (V_0^2 - V^2)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\omega\,. \tag{6}$$

4. Noi possiamo immaginare una massa liquida in moto che occupi l'intero spazio esterno a σ. È questo un movimento puramente ideale, ma che ha importanza, in quanto, nei punti dello spazio abbastanza vicini ad S_0, esso potrà differire pochissimo dal movimento reale di una massa che occupi lo spazio limitato da una superficie σ' i cui punti siano tutti a distanza finita, ma lontanissimi da σ.

Assegneremo, al tempo t, in tutto lo spazio S, le componenti di velocità u, v, w, le quali potranno ammettere delle superficie di discontinuità ω. Supporremo che all'infinito u, v, w assumano valori costanti u_0, v_0, w_0, vale a dire che all'infinito il movimento sia traslatorio; e precisamente, che, posto

$$u = u_0 + u' \quad , \quad v = v_0 + v' \quad , \quad w = w_0 + w',$$

u', v', w' si comportino all'infinito, per ciò che riguarda il modo di tendere a zero delle funzioni stesse e delle loro derivate, come potenziali di masse distribuite in S_0.

Alla pressione p imporremo la condizione di assumere all'infinito un valore costante p_0.

Si può allora dimostrare che la p è determinata in tutto lo spazio S; quindi, fissata la funzione λ, potremo considerare la quantità A, definita dalla formula (1), e cercare di trasformarla come nella Nota I, introducendo la funzione φ, *armonica e regolare in tutto lo spazio* S, *che nei punti di* σ *verifica la condizione* $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\lambda$, *e all'infinito si annulla* (o assume un valore costante).

Si troverà che susiste ancora la formula (4).

La funzione φ presenta i caratteri del potenziale di una massa *nulla* (per essere $\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma = \int_\sigma \lambda\,d\sigma = 0$) situata in S_0. Le sue derivate prime, che figurano nella espressione di A, decrescono rapidamente quando ci si allontana da S_0: all'infinito diventano infinitesime come l'inversa del cubo della distanza da un punto fisso. E ciò mostra che il movimento della massa liquida che occupa le regioni dello spazio lontane da S_0, ha poca influenza sul valore di A.

Se il movimento è continuo e irrotazionale in tutto lo spazio S, ed A rappresenta la componente, secondo la direzione del moto all'infinito, della spinta esercitata dal liquido sul corpo S_0, si troverà, col Cisotti, $A = 0$.

Se invece il movimento presenta gli stessi caratteri di quello considerato nel paragrafo precedente (salvo l'estendersi della regione T_1 all'infinito), varranno, qualunque sia il significato di λ, le formule (5) e (6), in cui alla costante V_0 attribuiremo il valore della velocità all'infinito. Converrà però che in luogo di V scriviamo $V_0 \cdot V$. Avremo pertanto:

$$A = K\varrho V_0^2,$$

essendo

$$K = \tfrac{1}{2}\int_\Omega (1 - V^2)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Omega,$$

ovvero

$$K = \tfrac{1}{2}\int_{\sigma_1}(1 - V^2)\,\lambda\,d\sigma_1 + \tfrac{1}{2}\int_\omega (1 - V^2)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\omega. \tag{7}$$

È superfluo ricordare che questo valore di A si riferisce al tempo t, in cui supponiamo che la massa occupante lo spazio T_2 sia in quiete: ciò che in generale non avverrà negl'istanti successivi.

5. Data la superficie σ che limita il corpo fisso S_0, e la direzione e il verso del moto traslatorio all'infinito, si può ritenere che esista una particolare superficie ω, che diremo ω', a cui corrisponde un movimento *stazionario* μ' della massa liquida. Essa si distacca da una linea tracciata sopra σ, che divide σ nelle due parti σ_1 e σ_2, e si estende all'infinito.

Diremo $V_0 \cdot V'$ la velocità nel movimento μ', V_0 essendo ancora la velocità di traslazione all'infinito. Sulla superficie ω', V' avrà un valore costante, ed eguale ad 1 (1).

Poniamo

$$K' = \tfrac{1}{2}\int_{\sigma_1}(1 - V'^2)\,\lambda\,d\sigma_1.$$

(1) V. Levi-Civita, *Sulla resistenza dei mezzi fluidi.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. X, 1901.

Consideriamo, al tempo t, un movimento μ, traslatorio all' infinito con velocità V_0, al quale corrisponda, come superficie di separazione fra le regioni T_1 e T_2, una superficie ω, i cui punti siano tutti a distanza finita da σ, ma che coincida in parte con ω', e se ne distacchi solo in punti lontanissimi da σ; ed ammettiamo che nella espressione (7) di K, il primo integrale differisca pochissimo da K', il secondo da zero: ciò che, in generale, avverrà effettivamente, per il modo di comportarsi delle derivate prime di φ allorchè ci si allontana da σ (§ 4), e per il fatto che, in prossimità di questa superficie, V differirà pochissimo da V', e, in particolare, nei punti di ω, da 1.

Lo stesso coefficiente K avrà allora un valore vicinissimo a K'. Inoltre, per un certo periodo di tempo, il movimento, in prossimità di σ, si conserverà sensibilmente stazionario; e K conserverà un valore poco diverso da K'.

6. Ritorniamo al caso che lo spazio S sia finito, e limitato dalle superficie σ e σ'.

Noi diamo al tempo t le componenti di velocità u, v, w, che devono verificare la condizione di incompressibilità

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{8}$$

e nei punti di σ e σ' l'altra condizione

$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0. \tag{9}$$

Date u, v, w, potremo calcolare le funzioni ξ, η, ζ, ed f, g, h (§ 1).

Supponiamo che u, v, w siano continue in tutto lo spazio S; e che inoltre resulti

$$f=\frac{\partial P}{\partial x}\quad,\quad g=\frac{\partial P}{\partial y}\quad,\quad h=\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{10}$$

ove P denoti una funzione regolare nello spazio S.

Ciò avverrà quando il movimento è stazionario; giacchè, essendo allora $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0$, le equazioni

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}-f\right), \text{ ecc.} \qquad \text{(I, § 3)} \tag{11}$$

dànno:

$$f=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\varrho}+U\right), \text{ ecc.};$$

onde sarà:

$$P = \frac{p}{\varrho} + U + \text{cost.}$$

Inversamente, se al tempo t sono verificate le equazioni (10), il movimento è stazionario. Infatti, dato u, v, w al tempo t, il movimento è determinato in ogni istante, sono cioè determinate le funzioni u, v, w delle coordinate x, y, z e del tempo, e, a meno di una costante, la pressione p. Esse devono soddisfare alle equazioni (8), (9) e (11); le quali resultano effettivamente soddisfatte, supponendo che u, v, w conservino sempre, in tutti i punti dello spazio, il valore che hanno al tempo t, e che la pressione sia

$$p = \varrho(P - U) + \text{cost.}$$

Il valore di A, in questo caso, si può avere direttamente dalla formula (1) sostituendo a p la sua espressione. Sarà:

$$A = \varrho \int_\sigma (P - U)\, \lambda\, d\sigma. \tag{12}$$

Ma, come verifica, si può anche ricavare dalla (4). Non avendosi superficie di discontinuità, mancherà in essa il 2° integrale. Sarà poi, per le formule (2) e (10):

$$D = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

avremo quindi, con una integrazione per parti, tenendo presenti l'equazione $\Delta\varphi = 0$ e le (3):

$$\int_S D\, dS = -\int_\sigma P\lambda\, d\sigma;$$

e sostituendo nella formula (4), otterremo ancora la (12).

In particolare, se mancano i vortici $(\xi = \eta = \zeta = 0)$, sarà $f = g = h = 0$, $P = \text{cost}$; e si ritroverà la formula (3) della Nota I [1].

[1] La formula (12) sussiste anche nel caso limite che la massa liquida occupi l'intero spazio esterno a σ, e in particolare se all'infinito il moto è traslatorio. Sarebbe però da vedersi se esistano movimenti continui, traslatorii all'infinito, stazionarii, *e non irrotazionali*. Posta la condizione che tutte le linee di corrente provengano dall'infinito, per il principio della conservazione dei vortici, il vortice, che all'infinito è nullo, sarà nullo in tutti i punti di una linea di corrente, quindi in tutto lo spazio. Si ricade dunque nel moto irrotazionale.

Fisica matematica. — *Il moto di un elettrone nel campo magnetico.* Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

1. Un elettrone si muove sotto l'azione di forze centrali; le coordinate x ed y della sua trajettoria (piana) soddisfano dunque alle

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\mathrm{F}(r)\cdot\dfrac{x}{r}, \\ m\ddot{y} = -\mathrm{F}(r)\cdot\dfrac{y}{r}, \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Si ecciti adesso un campo magnetico uniforme, perpendicolare alla giacitura dell'orbita, e si domandi sotto quali condizioni l'effetto del campo consisterà in una rotazione uniforme, intorno alla linea di forza che passa per il centro attraente

Analiticamente il problema vuol essere posto nel modo che segue.

Si scrivono le equazioni del fenomeno perturbato sotto la forma

$$(1) \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = -\mathrm{F}(r)\cdot\dfrac{x}{r} + \mathrm{AH}e\dot{y}, \\ m\ddot{y} = -\mathrm{F}(r)\cdot\dfrac{y}{r} - \mathrm{AH}e\dot{x}, \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

e si assumono le condizioni

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \xi\cos\omega t + \eta\sin\omega t, \\ y = \eta\cos\omega t - \xi\sin\omega t, \end{cases} \qquad [\text{con } \omega \text{ costante}],$$

intendendo che le ξ ed η soddisfino alle

$$(3) \qquad \begin{cases} m\ddot{\xi} = -\mathrm{F}(\varrho)\cdot\dfrac{\xi}{\varrho}, \\ m\ddot{\eta} = -\mathrm{F}(\varrho)\cdot\dfrac{\eta}{\varrho}, \end{cases} \qquad \varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Sostituisco le (2) nelle (1), e tengo conto delle (3), mi viene

$$\begin{cases} [(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\xi - (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot{\eta}]\cos\omega t \\ \qquad\qquad = -[(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\eta + (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot{\xi}]\sin\omega t, \\ [(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\eta + (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot{\xi}]\cos\omega t \\ \qquad\qquad = +[(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\xi - (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot{\eta}]\sin\omega t, \end{cases}$$

e dunque

$$[(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\xi - (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot\eta]^2 + [(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\eta + (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot\xi]^2 = 0\,,$$

o ancora

$$(4)\qquad [(2q-\omega)\,\omega\xi - 2(q-\omega)\,\dot\eta]^2 + [(2q-\omega)\,\omega\eta + 2(q-\omega)\,\dot\xi]^2 = 0\,,$$

con

$$(5)\qquad q = \frac{\mathrm{AH}e}{2m}\,.$$

Dalla (4) risulta immediatamente

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &(2q-\omega)\,\omega\xi - 2(q-\omega)\,\mathrm{D}\eta = 0\,,\\ &2(q-\omega)\,\mathrm{D}\xi + (2q-\omega)\,\omega\eta = 0\,,\end{aligned}\right.$$

e però le ξ ed η devono soddisfare alle

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix}(2q-\omega)\,\omega & -2(q-\omega)\,\mathrm{D}\\ 2(q-\omega)\,\mathrm{D} & (2q-\omega)\,\omega\end{vmatrix}\xi = 0\,,\\ &\begin{vmatrix}(2q-\omega)\,\omega & -2(q-\omega)\,\mathrm{D}\\ 2(q-\omega)\,\mathrm{D} & (2q-\omega)\,\omega\end{vmatrix}\eta = 0\,,\end{aligned}\right.$$

cioè alle

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\ddot\xi = -\frac{(2q-\omega)^2\cdot\omega^2}{4(q-\omega)^2}\cdot\xi\,,\\ &\ddot\eta = -\frac{(2q-\omega)^2\cdot\omega^2}{4(q-\omega)^2}\cdot\eta\,.\end{aligned}\right.$$

Perchè le (7) si identifichino con le (3) bisogna dunque fare

$$(8)\qquad \frac{\mathrm{F}(\varrho)}{\varrho} = p^2 = \text{costante.}$$

A parole « vi è un modo solo per soddisfare rigorosamente alla richiesta; « la forza deve essere proporzionale alla distanza o il movimento armonico ».

Si ricade così nelle condizioni ben note, che dànno origine al fenomeno di Zeeman.

2. Ponendo, secondo le (7) e (8)

$$\frac{(2q-\omega)\,\omega}{2(q-\omega)} = \pm p\,,$$

risulta

$$\omega = \begin{cases} \begin{cases} q+p-\sqrt{p^2+q^2}\,, & (\alpha) \\ q+p+\sqrt{p^2+q^2}\,, & (\alpha') \end{cases} \\ \begin{cases} q-p+\sqrt{p^2+q^2}\,, & (\beta) \\ q-p-\sqrt{p^2+q^2}\,. & (\beta') \end{cases} \end{cases}$$

In realtà, se si scrive

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \xi = a \cos pt\,, \\ \eta = a \sin pt\,, \end{cases}$$

le (6) riescono soddisfatte con le posizioni (α) e (α'); se si postula invece che sia

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \xi = \quad a \cos pt\,, \\ \eta = -a \sin pt\,, \end{cases}$$

bisogna ricorrere ai valori (β) e (β').

Dalle (A) e (α) deriva

$$[\mathrm{A}\,,\alpha] \cdots\cdots \begin{cases} x = a \cos pt \cos \omega t + a \sin pt \sin \omega t\,, \\ \quad = a \cos(p-\omega)\,t\,, \\ \quad = a \cos(\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,, \\ y = a \sin pt \cos \omega t - a \cos pt \sin \omega t\,, \\ \quad = a \sin(p-\omega)\,t\,, \\ \quad = a \sin(\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,; \end{cases}$$

mentre dalle (B) e (β) risulta

$$[\mathrm{B}\,,\beta] \cdots\cdots \begin{cases} x = \quad a \cos pt \cos \omega t - a \sin pt \sin \omega t\,, \\ \quad = \quad a \cos(p+\omega)\,t\,, \\ \quad = \quad a \cos(\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,, \\ y = -a \sin pt \cos \omega t - a \cos pt \sin \omega t\,, \\ \quad = -a \sin(p+\omega)\,t\,, \\ \quad = -a \sin(\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,. \end{cases}$$

Quanto alle combinazioni [A , α'] e [B , β'] esse non ci apprendono niente di nuovo.

Perchè dalla prima nasce

$$[A,\alpha'] \equiv [B,\beta] \cdots\cdots \begin{cases} x = a\cos(p-\omega)\,t\,, \\ = a\cos(-\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,, \\ = a\cos(\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,, \\ y = a\sin(p-\omega)\,t\,, \\ = a\sin(-\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,, \\ = -a\sin(\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,; \end{cases}$$

e dalla seconda

$$[B,\beta'] \equiv [A,\alpha] \cdots\cdots \begin{cases} x = a\cos(p+\omega)\,t\,, \\ = a\cos(-\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,, \\ = a\cos(\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,, \\ y = -a\sin(p+\omega)\,t\,, \\ = -a\sin(-\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,, \\ = a\sin(\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,. \end{cases}$$

Ho dato nel luglio scorso un metodo il quale permette di descrivere meccanicamente le orbite, che corrispondono, per il caso testè trattato agli integrali generali (¹).

3. Si noterà adesso che quando la q^2 fosse piccola in confronto della p^2, le (α) e (β) fornirebbero concordemente

$$\omega = q\,.$$

Questo risultato è più generale che non possa parere a prima vista. In realtà se si suppone debolissima, come è nei casi pratici, la perturbazione dovuta al campo magnetico, i primi membri delle (6) si riducono ai termini, che contengono le velocità; e risulta dunque

$$(6')\qquad \begin{cases} (q-\omega)\,\dot{\xi} = 0\,, \\ (q-\omega)\,\dot{\eta} = 0\,, \end{cases}$$

alle quali equazioni si soddisfa ponendo ancora una volta

$$\omega = q\,.$$

E però « l'orbita di un elettrone, soggetto a forze centrali, gira senza de« formarsi nel suo piano, intorno al punto attraente, quando si ecciti un

(¹) Rend. R. Acc. dei Lincei (5), XVIII, [1], 583, 1909.

« campo debole normale al detto piano, e gira, per la (5), con la velocità « angolare

$$\omega = \frac{AHe}{2m} \text{ ».}$$

La cosa fu riconosciuta già, recentemente, dal Righi, per il caso dei sistemi che dànno origine ai cosidetti raggi magnetici [1].

Paleontologia. — *Alcuni mammiferi fossili del Genovesato e del Savonese.* Memoria del Corrisp. A. Issel.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Matematica. — *Sulla risolubilità della equazione integrale lineare di prima specie.* Nota del dott. Luigi Amoroso, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Recentemente [2] il prof. G. Lauricella, completando un resultato del prof. E. Picard [3], dimostrava che condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione

$$\int_a^b f(x)\, U(x\,,y)\, dx = g(y) \tag{1}$$

ammetta una soluzione $f(x)$ atta all'integrazione insieme al suo quadrato $f^2(x)$ nell'intervallo ab sono:

1°) che una certa serie Σa_n^2 sia convergente;

2°) che la $g(y)$ sia esprimibile per mezzo di una serie di Fourier-Hilbert procedente per certe funzioni date $\varphi_1(y)\,, \varphi_2(y)\,, \dots\,, \varphi_n(y)\,, \dots$

Il problema della risolubilità della equazione (1) viene così ricondotto a determinare quando una funzione $g(y)$ è sviluppabile in una serie di Fourier-Hilbert di funzioni date $\varphi_1\,, \varphi_2\,, \dots\,,$ problema difficile, di cui non è ancora stata data una soluzione esauriente.

Ad un risultato analogo noi eravamo giunti [4] nel caso particolare in cui l'integrale del primo membro è esteso ad un contorno chiuso e le funzioni che si considerano sono funzioni uniformi dei punti di quel contorno.

[1] Rend. R. Acc. dei Lincei (5), XVIII, [2], 241 e 301, 1909.
[2] Comptes Rendus, 14 giugno 1909.
[3] Atti della R. Accademia dei Lincei, 1 agosto 1909.
[4] Annali di Matematica, marzo 1909.

Nella presenta Nota ci permettiamo di tornare sull'argomento per presentare un nuovo criterio, valevole pel caso generale, che, se non erriamo, ci sembra più elementare.

2. Premettiamo il seguente problema. Essendo dato nell'intervallo ab un certo numero m di funzioni $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ linearmente indipendenti, atte all'integrazione insieme ai loro quadrati in tutto l'intervallo, e corrispondentemente m costanti $c_1, c_2, \dots, c_m$ determinare fra tutte le funzioni che soddisfano simultaneamente alle equazioni

$$\int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r \qquad (r = 1, 2, \dots, m) \tag{2}$$

quella per cui l'integrale $I = \int_a^b f^2(x)\, dx$ è un minimo.

Secondo i principî del calcolo delle variazioni, otteniamo, uguagliando a zero, la variazione prima dell'integrale I e tenuto conto della (2)

$$\int_a^b (f(x) - \lambda_1 u_1(x) - \cdots - \lambda_m u_m(x))\, \delta f\, dx = 0,$$

tale relazione dovendo aver luogo qualunque sia δf dovrà essere

$$f(x) = \lambda_1 u_1(x) + \cdots + \lambda_m u_m(x),$$

da cui eliminando $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ per mezzo della (2), dopo aver posto

$$a_{rs} = \int_a^b u_r(x)\, u_s(x)\, dx,$$

si ottiene

$$f(x) = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & c_m \\ u_1(x) & \dots & u_m(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}}. \tag{3}$$

È facile vedere che l'espressione precedente rappresenta effettivamente una soluzione delle (2), il denominatore essendo diverso da zero, poichè le $u_1(x) \dots u_m(x)$ sono linearmente indipendenti ([1]).

([1]) Vale la pena di enunciare a parte il risultato seguente, che sostituisce con vantaggio il criterio dato dall'annullarsi del Wronskiano, e che si dimostra molto facilmente:

Il valore del minimo I è quindi

$$\mathrm{I} = \int_a^b f^2(x)\,dx = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & c_1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & c_m \\ c_1 & \dots & c_m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}}\,.$$

Il numeratore essendo una forma quadratica irriducibile nelle $c_1, c_2, \dots, c_m$, possiamo ridurlo ad una forma canonica in m variabili, e la riduzione si ottiene ponendo:

$$\Gamma_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,r-1} & c_1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & \dots & a_{r\,r-1} & c_m \end{vmatrix}\,, \quad \mathrm{B}_r = \int_a^b \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,r-1} & u_1(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & \dots & a_{r\,r-1} & u_r(x) \end{vmatrix}^2 dx\,,$$

« Condizione necessaria e sufficiente perchè m funzioni $u_1(x), \dots, u_m(x)$ definite nell'intervallo $a\,b$, non identicamente nulle, sieno linearmente indipendenti è che sia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0,$$

essendo

$$a_{rs} = \int_a^b u_r(x)\,u_s(x)\,dx \text{ ».}$$

Infatti, se una delle $u_\mu(x)$ si può ottenere come combinazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti delle rimanenti, nel determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$ una colonna si ottiene come combinazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti delle rimanenti, e quindi quel determinante è nullo.

Viceversa, essendo

$$\int_a^b \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,m-1} & u_1(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{m\,m-1} & u_m(x) \end{vmatrix}^2 dx = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,m-1} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

se è $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = 0$, o la $u_m(x)$ è una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti delle precedenti, oppure è anche $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m-1} \\ . & . & . \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix} = 0$, ecc.

da cui

$$I = \frac{\Gamma_1^2}{B_1} + \frac{\Gamma_2^2}{B_2} + \cdots + \frac{\Gamma_m^2}{B_m}.$$

La forma è quindi definita positiva.

2. Vediamo come si modifica il problema, allorquando le funzioni $u_1(x) \dots u_m(x)$ non sono più linearmente indipendenti, ma sono legate da un certo numero di relazioni identiche

$$b_{\rho 1} u_1(x) + b_{\rho 2} u_2(x) + \cdots + b_{\rho m} u_m(x) = 0 \quad , \quad \rho = 1, 2, \dots, \mu \leq m$$

le $b_{\rho s}$ essendo costanti.

Evidentemente in questo caso il problema non è sempre risolubile, e la condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità è che $c_1 \dots c_m$ sieno legate dalle relazioni corrispondenti

$$b_{\rho 1} c_1 + b_{\rho 2} c_2 + \cdots + b_{\rho m} c_m = 0 \quad , \quad \rho = 1, 2, \dots, \mu \leq m$$

le $b_{\rho s}$ essendo le stesse costanti precedenti.

Sia B_{ρ_1} tra le B_r la prima che si annulli, $\rho_1 \geq 1$. Conveniamo allora in tutti i determinanti Γ_r ed in tutti i determinanti che compariscono sotto il segno in B_r, per tutti gli indici $r > \rho_1$ di sopprimere la ρ_1^{esima} linea e la ρ_1^{esima} colonna.

Sia B_{ρ_2} la seconda tra le B_r che si annulli, $\rho_2 > \rho_1$. Conveniamo nei determinanti Γ_r e nei determinanti che compariscono sotto il segno in B_r, per tutti gli indici $r > \rho_2$, nei quali abbiamo già soppresso la ρ_1^{esima} linea e la ρ_1^{esima} colonna, di sopprimere la ρ_2^{esima} linea e la ρ_2^{esima} colonna, e così via per tutte le B_r che si annullano.

Fatte tutte le soppressioni, diciamo Γ_r' e B_r' le espressioni che si ottengono.

La condizione precedente di risolubilità si può esprimere dicendo che, ove sia $B_s' = 0$, deve essere ancora $\Gamma_s' = 0$.

Conveniamo ancora di porre per definizione $\dfrac{\Gamma_s'^2}{B_s'} = 0$, ove sia

$$\Gamma_s' = B_s' = 0 .$$

Supposta soddisfatta la condizione di risolubilità, l'espressione

$$I = \frac{\Gamma_1'^2}{B_1'} + \frac{\Gamma_2'^2}{B_2'} + \cdots + \frac{\Gamma_m'^2}{B_m'}$$

ha un valore determinato e finito, e rappresenta il minimo dell'integrale $\int_a^b f^2(x)\,dx$, $f(x)$ essendo una funzione che soddisfa alle (2) proposte.

Ove la condizione di risolubilità non risulti soddisfatta, la espressione precedente non ha più alcun significato, essendovi in essa qualche termine che assume la forma $\frac{p}{0}$.

4. Ciò premesso, sia $f_0(x)$ una soluzione dell'equazione integrale (1), essendo $\int_a^b f_0^2(x)\,dx < \mathrm{A}$. Poniamo

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_r(x) &= \int_a^b y^{r-1} \mathrm{V}(x\,,y)\,dy \\ c_r &= \int_a^b y^{r-1}\,g(y)\,dy\,. \end{aligned} \right.$$

La funzione $f_0(x)$ soddisfa al sistema di equazioni

$$\int_a^b f_0(x)\,u_r(x)\,dx = c_r \qquad r = 1\,,2\,,\dots\,,m$$

qualunque sia m, onde, costruite le Γ_m' e le B_m' secondo i numeri precedenti, abbiamo $\sum_1^m{}_\mu \frac{\Gamma_\mu'^2}{\mathrm{B}_\mu'} < \mathrm{A}$, qualunque sia m; e quindi la serie $\Sigma_\mu \frac{\Gamma_\mu'^2}{\mathrm{B}_\mu'}$ converge. La convergenza di quella serie è quindi condizione necessaria per la risolubilità dell'equazione (1).

5. Mostriamo che è sufficiente. Poniamo

$$(5) \qquad v_r(x) = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\,r-1}\,u_1(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1} \dots a_{r\,r-1}\,u_r(x) \end{vmatrix},$$

e conveniamo, se v_ρ è identicamente nulla, $\rho \geq 1$, di sopprimere entro v_r, $r > \rho$, la ρ^{esima} linea e la ρ^{esima} colonna: diciamo $v_r'(x)$ le funzioni che così si ottengono.

Abbiamo

$$\int_a^b v_\mu'(x)\,u_\nu(x)\,dx = 0\,, \quad \nu < \mu$$

e quindi

$$\int_a^b v_\mu'(x)\,v_\nu'(x)\,dx \begin{aligned}[t] &= 0 \qquad \nu \neq \mu \\ &= \mathrm{B}_\mu' \qquad \nu = \mu\,. \end{aligned}$$

Poniamo ancora

$$(6) \qquad w_\mu(x) = \frac{v_\mu'(x)}{+\sqrt{\mathrm{B}_\mu'}}\,.$$

Questa espressione non ha significato quando è $\mathrm{B}_\mu' = 0$, assumendo allora la forma $\frac{0}{0}$: perciò conveniamo di scartare quelle delle $v_\mu'(x)$ che sono $\equiv 0$,

e di limitare alle rimanenti la posizione (6), per queste si ottiene

$$\int_a^b w_\mu(x)\, w_\nu(x)\, dx = 0 \quad , \quad \mu \neq \nu$$
$$= 1 \quad , \quad \mu = \nu .$$

Per un noto teorema di Riesz [1], la serie $\Sigma_\mu \dfrac{\Gamma_\mu'^2}{B_\mu'}$ essendo convergente, esisterà una funzione $f(x)$ per cui

$$\int_a^b f(x)\, w_\mu(x)\, dx = \frac{\Gamma_\mu'}{\sqrt{B_\mu'}}$$

qualunque sia l'indice di $w_\mu(x)$, e quindi avremo

$$\int_a^b f(x)\, v_\mu'(x)\, dx = \Gamma_\mu' ,$$

relazione che vale anche per quelle delle $v_\mu'(x)$ che fossero identicamente nulle, riducendosi in quel caso alla identità $0 = 0$. Quella relazione sussiste quindi per tutti i valori di μ, onde sostituendo per Γ_μ' e $v_\mu'(x)$ le loro espressioni, si ottiene

$$\int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r$$

qualunque sia r. Posto quindi

$$h(y) = g(y) - \int_a^b f(x)\, V(x, y)\, dx ,$$

abbiamo

$$\int_a^b y^{r-1}\, h(y)\, dy = \int_a^b y^{r-1}\, g(y)\, dy - \int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r - c_r = 0$$

qualunque sia r, da cui si conclude $h(y) \equiv 0$.

Conclusione. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una soluzione dell'equazione* (1) *atta all'integrazione insieme al suo quadrato nell'intervallo* ab, *è che la serie* $\Sigma \dfrac{\Gamma_\mu'^2}{B_\mu'}$ *sia convergente.*

Se quella condizione è soddisfatta $\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma_\mu', \dots$, rappresentano i valori degli integrali

$$\int_a^b f(x)\, v_1'(x)\, dx \; , \; \int_a^b f(x)\, v_2'(x)\, dx \; , \dots , \; \int_a^b f(x)\, v_\mu'(x)\, dx \; , \dots$$

[1] *Ueber ortogonale Funcktionensysteme*, Nachr. zu Gott., 1907.

6. Il metodo seguìto nella precedente trattazione consiste in sostanza nel determinare una funzione $f(x)$ che soddisfi alle infinite equazioni

$$\int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r\,, \qquad r = 1\,, 2\,, \ldots\,,$$

ove è

$$u_r(x) = \int_a^b y^{r-1}\, \mathrm{V}(x\,, y)\, dy \quad , \quad c_r = \int_a^b y^{r-1}\, g(y)\, dy\,.$$

Quella trattazione rimarrebbe inalterata, ove si ponesse invece

$$u_r(x) = \int_a^b \mathrm{V}(x\,, y)\, \varphi_r(y)\, dy \quad , \quad c_r = \int_a^b g(y)\, \varphi_r(y)\, dy\,,$$

$\varphi_1\,, \varphi_2\,, \ldots\,,$ essendo funzioni soggette all'unica condizione di costituire un sistema chiuso, tale cioè che non esista nessuna funzione non identicamente nulla $h(x)$ per cui sia $\int_a^b h(x)\, \varphi_r(x)\, dx = 0$ per ogni valore di r.

7. Dei risultati ottenuti si può dare una elegante interpretazione geometrica.

Supponiamo per semplicità che $u_1\,, \ldots\,, u_m$ sieno linearmente indipendenti, e poniamo

$$k_m = \frac{\Gamma_1^2}{\mathrm{B}_1} + \frac{\Gamma_2^2}{\mathrm{B}_2} + \cdots + \frac{\Gamma_m^2}{\mathrm{B}_m} = - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & c_m \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}}\,.$$

Diciamo A_m il determinante denominatore, ed $\mathrm{A}_{rs}^{(m)}$ il complemento algebrico di a_{rs} in quello.

In uno spazio ad m dimensioni consideriamo la quadrica irriducibile Q_m di cui l'equazione in coordinate di punti è $\Sigma\, a_{rs}\, \xi_r\, \xi_s = 0$ ed in coordinate di iperpiani $\frac{1}{\mathrm{A}_m} \Sigma \mathrm{A}_{rs}^{(m)}\, \eta_r\, \eta_s = 0$; k_m rappresenta appunto il valore che assume il primo membro di quell'ultima equazione, ove si pongano per $\eta_1\,, \eta_2\,, \ldots\,, \eta_m$ le coordinate $c_1\,, c_2\,, \ldots\,, c_m$ che nello spazio considerato si possono ritenere come le coordinate di un certo iperpiano $\mathit{\Delta}_m$ ad m dimensioni.

Supponiamo che, crescendo m indefinitamente, $u_1\,, u_2\,, \ldots\,, u_m$ restino sempre linearmente indipendenti. Seguendo un concetto sviluppato dal professore S. Pincherle, possiamo allora considerare in uno spazio ad un numero

infinito di dimensioni la quadrica irriducibile Q_∞ di cui l'equazione in coordinate di punti è $\Sigma a_{rs}\, \xi_r\, \xi_s = 0$, ed in coordinate di piani è

$$\frac{1}{A_\infty} \Sigma A_{rs}^{(\infty)}\, \eta_r\, \eta_s = 0 \,.$$

In quello spazio la funzione $g(y)$ è rappresentata da un iperpiano $\mathit{\Delta}$ ad infinite dimensioni, precisamente dall'iperpiano le cui coordinate sono $c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$

Segando la quadrica Q e l'iperpiano $\mathit{\Delta}$ coll'iperpiano coordinato ad r dimensioni $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ otteniamo per sezione la quadrica Q_r e l'iperpiano ad $r-1$ dimensioni $\mathit{\Delta}_r$.

La condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (1) sia risolubile è che il primo membro dell'equazione della quadrica inviluppo Q_r, sostituitevi le coordinate del piano $\mathit{\Delta}_r$, conservi, al crescere di m, un valore determinato e finito: brevemente che il primo membro dell'equazione della quadrica inviluppo Q, sostituitevi le coordinate dell'iperpiano $\mathit{\Delta}$ abbia un valore determinato e finito.

Analogo, ma più complicato nella esposizione, è il caso in cui le $u_1, u_2, \dots$ non sono linearmente indipendenti.

8. Osserviamo finalmente che la trattazione precedente si estende senza incontrare difficoltà essenziali, alla equazione

$$g(\eta_1 \dots \eta_n) = \int_\sigma f(\xi_1 \dots \xi_m)\, V(\xi_1 \dots \xi_m | \eta_1 \dots \eta_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_m \,,$$

$\xi_1 \dots \xi_m$ variando entro un campo σ ad m dimensioni, $\eta_1 \dots \eta_n$ entro un campo τ ad n dimensioni.

Meccanica. — *Sul moto stazionario lento di un liquido viscoso.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Socio Levi-Civita.

In questa Nota stabilisco una proprietà, che mostra la dipendenza dei problemi di moto stazionario lento dei liquidi viscosi, da problemi di equilibrio elastico: precisamente, faccio vedere che la determinazione della velocità delle particelle liquide nel moto stazionario lento di un liquido viscoso, che occupa lo spazio S interno od esterno ad una superficie chiusa σ, nell'ipotesi che nei punti di σ si conosca la velocità delle particelle stesse, si effettua immediatamente allorchè sia determinata la deformazione del solido S, riguardato come elastico ed isotropo, nel caso in cui si conosca lo spostamento subìto dai punti del contorno σ. Basta infatti dare un valore particolare alla costante di elasticità.

Poichè il problema elastico si sa ormai risolvere per campi molto generali, si conclude che per tali campi sarà senz'altro risolto anche il problema idrodinamico enunciato. Quest'ultimo problema, limitato però al solo campo interno a σ, è pure stato risolto recentemente da A. Korn [1], con procedimento diretto, analogo a quello che egli stesso aveva impiegato precedentemente per l'integrazione della doppia equazione di Laplace. La proprietà che io dimostro qui, elimina quindi questi nuovi calcoli, bastando, allo scopo, le formole del problema elastico.

Per maggior chiarezza richiamo dapprima (n. 1) un procedimento, assai semplice, dovuto al prof. Marcolongo [2] col quale, da soluzioni particolari, note già da molto tempo, delle equazioni indefinite dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, si deduce un sistema di tre equazioni integrali, che permette di risolvere il problema dell'equilibrio elastico per dati spostamenti superficiali.

In questo lavoro mi valgo della recente teoria delle omografie vettoriali [3], che rende i calcoli e la esposizione più agile, breve e nitida; in conseguenza, essendo del tutto eliminate le coordinate, invece di un sistema di tre equazioni integrali, si trova una sola equazione integrale di seconda specie, il cui nucleo è un'omografia vettoriale. A tale equazione si possono, del resto, applicare le note proprietà delle ordinarie equazioni integrali. Dalle formole che ottengo per il problema elastico, seguono immediatamente (n. 2) quelle che dimostrano la proprietà enunciata.

1. *Equazioni del problema elastico.* — Sia S un solido elastico isotropo, limitato da una superficie σ. Se diciamo $\mathbf{s}$ il vettore (infinitesimo) che rappresenta lo spostamento subìto da un punto qualunque del solido, in una sua deformazione, la condizione di equilibrio elastico di S, nell'assenza di forze esterne, è rappresentata dall'equazione (*O. v.*, pag. 76):

$$\Delta'\mathbf{s} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} = 0, \tag{1}$$

ove k è una costante.

Orbene, è facile vedere che, se si introduce il parametro:

$$\lambda = \frac{k}{k+2},$$

[1] Korn, *Allgemeine Lösung des Problems kleiner, stationärer Bewegungen in reibenden Flüssigkeiten.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXV, 1° semestre 1908.

[2] Marcolongo, *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica,* Rendiconti di questa Accademia, serie 5ª, vol. XVI, 1° semestre 1907.

[3] Tale teoria trovasi egregiamente sviluppata, con varie interessanti applicazioni, nel recentissimo volumetto *Omografie vettoriali,* ecc. (G. B. Petrini, Torino, 1909), dei proff. Burali-Forti e Marcolongo. Nelle citazioni, indicherò questo libro con (*O. v.*).

e si indica con $\mathbf{a}$ un vettore costante, si soddisfa alla (1) assumendo:

$$\mathbf{s} = 2\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \lambda\frac{dr^2}{dn}\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r} \text{ (}^1\text{)}, \tag{2}$$

ove r è la distanza di un punto qualunque P dello spazio, da un punto M di σ, e $\frac{d}{dn}$ indica la solita derivata normale interna che, per una funzione qualunque f, può esprimersi sotto forma assoluta così (*O. v.*, nota pag. 52):

$$\frac{df}{dn} = \frac{df}{d\mathrm{M}}\mathbf{N},$$

$\mathbf{N}$ essendo un vettore unitario, parallelo alla normale a σ e diretto all'interno di S.

Infatti si ha dalla (2), applicando una nota formola (*O. v.*, pag. 62, [7]):

$$\Delta'_P \mathbf{s} = -2\lambda\left(\frac{d}{d\mathrm{P}}\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r}\right)\operatorname{grad}_P \frac{dr^2}{dn};$$

e poichè:

$$\operatorname{grad}_P \frac{dr^2}{dn} = 2\frac{d(\mathrm{P}-\mathrm{M})}{dn} = -2\mathbf{N},$$

si conclude:

$$\Delta'_P \mathbf{s} = -4\lambda\left(\frac{d}{d\mathrm{M}}\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r}\right)\mathbf{N} = -4\lambda \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right). \tag{3}$$

Dalla (2) si trae ancora, mediante un'altra formola (*O. v.*, pag. 57, [8]):

$$\operatorname{div}_P \mathbf{s} = 2\operatorname{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) - \lambda\left(\operatorname{grad}_P \frac{dr^2}{dn}\right)\times \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r},$$

e poichè l'ultimo termine vale:

$$2\lambda\mathbf{N}\times \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r} = -2\lambda\mathbf{N}\times \operatorname{grad}_M \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r},$$

risulta:

$$\operatorname{div}_P \mathbf{s} = 2\operatorname{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) - 2\lambda\frac{d}{dn}\operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r},$$

(1) Si è messo l'indice P alle operazioni grad e div per indicare che negli enti su cui esse operano, s'intende che P è la variabile indipendente.

e perciò:

$$(4) \qquad \mathrm{div}_P \, \mathbf{s} = 2(1-\lambda)\, \mathrm{div}_P \left(\mathbf{a} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} \right).$$

Dalle (3), (4), e dall'espressione di λ, segue senz'altro la (1); c. d. d.

Se u è un numero funzione di P, si ha:

$$\mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, (u\mathbf{a}) = \frac{d\, \mathrm{grad}\, u}{dP} \mathbf{a}\,;$$

infatti il primo membro vale grad $(\mathbf{a} \times \mathrm{grad}\, u)$ e trasformando mediante due note formole (*O. v.*, pag. 51, [5], e pag. 54, [15]), si ottiene il secondo membro.

Si conclude quindi, che la (2) può ancora scriversi:

$$(2') \qquad \mathbf{s} = 2\mathbf{a} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} - \lambda \frac{dr^2}{dn} \frac{d\, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}}{dP} \mathbf{a}\,.$$

Se si indica con $\mathbf{s}_0$ un vettore funzione finita e continua dei punti M di σ, è chiaro che l'espressione:

$$(5) \qquad \mathbf{s} = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \mathbf{s}_0 \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{\lambda}{4\pi} \int_\sigma \frac{dr^2}{dn} \frac{d\, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}}{dP} \mathbf{s}_0\, d\sigma$$

è ancora una soluzione della (1).

Supponiamo ora che il punto P appartenga allo spazio S, e che muovendosi in S tenda verso un punto Q del contorno. È noto dalle proprietà della funzione potenziale di strato semplice, che, per condizioni molto generali relative al contorno σ, si ha dalla (5), al limite:

$$(6) \quad \mathbf{s}(Q) = \mathbf{s}_0(Q) + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \mathbf{s}_0(M) \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{\lambda}{4\pi} \int_\sigma \frac{dr^2}{dn} \frac{d\, \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}}{dQ} \mathbf{s}_0(M)\, d\sigma \ (^1),$$

(1) Se u, v, w sono le coordinate di $\mathbf{s}$ rispetto ad una terna di assi ortogonali, u_0, v_0, w_0 sono le coordinate di $\mathbf{s}_0$, ed x, y, z quelle di Q, si deduce dalla (6):

$$u(Q) = u_0(Q) + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma u_0(M) \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma -$$
$$- \frac{\lambda}{4\pi} \int_\sigma \frac{dr^2}{dn} \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} u_0(M) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y} v_0(M) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z} w_0(M) \right] d\sigma,$$

e due analoghe per $v(Q), w(Q)$. Questo sistema di equazioni integrali è stato dato la prima volta dal Fredholm, che lo ottenne con metodo del tutto diverso.

che può scriversi:

$$\mathbf{s}(Q) = \mathbf{s}_0(Q) + \int_\sigma \alpha(Q\,,M)\,\mathbf{s}_0(M)\,d\sigma\,, \tag{6'}$$

ove $\alpha(Q\,,M)$ indica l'omografia vettoriale (funzione dei punti $Q\,,M$), che è più particolarmente una « dilatazione »:

$$\alpha(Q\,,M) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{dr^2}{dn}\frac{d\,\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r}}{dQ}\,,$$

la quale, dopo qualche trasformazione, può ancora scriversi:

$$\alpha(Q\,,M) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}[1 + 2\lambda + 3\lambda(\mathrm{grad}_Q\, r\wedge)^2]\,.$$

Se ora, nel problema elastico, supponiamo noti gli spostamenti superficiali, nella (6′) sarà noto $\mathbf{s}$, e si tratterà di cercare $\mathbf{s}_0$; la (6′) è allora un'equazione integrale di seconda specie, il cui nucleo $\alpha(Q\,,M)$, col tendere di M a Q diventa infinito soltanto come $\frac{1}{r}$. Essa quindi può risolversi col noto metodo del Fredholm. Dopo aver così determinato $\mathbf{s}_0$, la (5) fornirà $\mathbf{s}$.

Lo stesso procedimento è applicabile alla risoluzione del problema elastico esterno [1].

2. *Equazioni del problema idrodinamico.* — Consideriamo un liquido viscoso, che occupi lo spazio S racchiuso da una superficie σ. Se diciamo $\mathbf{v}$ il vettore che rappresenta la velocità di una particella qualunque P di liquido, e p l'intensità della pressione, le equazioni del moto stazionario lento del liquido, nell'ipotesi che le forze di massa derivino da un potenziale U [2], sono:

$$\Delta'\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,p_1\,, \tag{7}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\,, \tag{8}$$

ove $p_1 = (p - U)/h$, h essendo una costante.

(1) Cfr. Marcolongo, Nota citata.

(2) Si potrebbe addirittura supporre $U = 0$, giacchè il caso dell'esistenza di forze di massa qualunque, si può facilmente ridurre a quello in cui le forze di massa sono nulle. Cfr. a questo proposito la mia Nota: *Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso*, n. 2, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, in corso di stampa.

Orbene, se **a** è un vettore costante, e si conservano le notazioni precedenti, si soddisfa alle (7), (8) assumendo:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{a}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dr^2}{dn}\,\mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\,\frac{\mathbf{a}}{r}\,, \tag{9}$$

$$p_1 = -4\,\mathrm{div}_P\left(\mathbf{a}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right). \tag{10}$$

Infatti, la (9) si ottiene dalla (2) per $\lambda = 1$; perciò dalle (3), (10) segue evidentemente la (7), e dalla (4) la (8); c. d. d.

Se $\mathbf{v}_0$ è un vettore funzione finita e continua dei punti M di σ, è chiaro che le espressioni

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mathbf{v}_0\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{dr^2}{dn}\,\frac{d\,\mathrm{grad}_P\,\frac{1}{r}}{dP}\,\mathbf{v}_0\,d\sigma\,, \tag{11}$$

$$p_1 = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{div}_P\int_\sigma \mathbf{v}_0\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma\,, \tag{12}$$

soddisfano pure alle (7), (8) (¹).

La (11) è un caso particolare della (5), perchè si deduce dalla (5) per $\lambda = 1$, perciò si conclude pure che sussiste per **v** ancora la (6) ove $\lambda = 1$, quindi *la soluzione* **v** *delle* (7), (8) *che nei punti* Q *di* σ *coincide con un vettore dato* $\mathbf{v}(\mathrm{Q})$ (²), *si deduce dalla soluzione* **s** *del problema dell'equilibrio elastico per dati spostamenti superficiali, ponendo in essa* $\lambda = 1$ (³). Tale valore di λ non è, com'è noto, un autovalore per la (6).

Essendo così determinato **v**, si potrà ricavare p_1 dalla (7), perchè è verificata la condizione d'integrabilità espressa da $\mathrm{rot}\,\Delta'\mathbf{v} = 0$; ovvero, dopo aver ricavato $\mathbf{v}_0(\mathrm{Q})$ dalla (6) per $\lambda = 1$, si otterrà poi p_1 dalla (12). Più semplicemente ancora, basterà applicare la formola:

$$p_1 = -\lim_{k=\infty}(k\,\mathrm{div}\,\mathbf{s})\,,$$

che si desume dal confronto delle (7), (8), (1).

(¹) Ciò si desume anche dalle ultime due formole della mia Nota citata.

(²) Trattandosi di un campo finito S, il vettore $\mathbf{v}(\mathrm{Q})$ deve soddisfare alla condizione seguente, che si ricava dalla (8), mediante il teorema della divergenza:

$$\int_\sigma \mathbf{v} \times \mathbf{N}\,d\sigma = 0\,.$$

Invece per il problema esterno, questa condizione non occorre.

(³) Una verifica di questa proprietà si ha, nel caso della sfera, dalle formole stabilite nella mia Nota citata.

La stessa proprietà vale per il problema idrodinamico esterno.

Giova notare che — come mi fa gentilmente osservare il prof. Levi-Civita — se non si tenesse conto di condizioni ai limiti, si riconoscerebbe immediatamente che l'integrazione delle equazioni indefinite (7), (8) può farsi dipendere dall'integrazione dell'equazione indefinita (1). Basta infatti, per ogni integrale $\mathbf{s}$ della (1), introdurre una funzione φ tale che $\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{s}$, allora ponendo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} - \operatorname{grad} \varphi \quad , \quad p_1 = -(k+1)\,\Delta\varphi\,,$$

le (7), (8) risultano soddisfatte.

Osservazione. — Anche la soluzione della doppia equazione di Laplace, che assume, colla sua derivata normale, dati valori al contorno, si può ottenere come caso particolare del problema elastico considerato nel n. 1: basta precisamente porre $\lambda = -1$, ovvero $k = -1$, come ho mostrato già una decina d'anni addietro [1]; in tal caso bisogna però aggiungere alla (1) la condizione $\Delta \operatorname{div} \mathbf{s} = 0$, che per $k \neq -1$ è conseguenza della (1). Infatti, ponendo $\mathbf{s} = \operatorname{grad} u$, ove u è una funzione da determinarsi, si ha $\operatorname{div} \mathbf{s} = \Delta u$, onde si conclude che u soddisfa alla doppia equazione di Laplace $\Delta\Delta\, u = 0$. Conoscendo poi $\mathbf{s}$ per i punti del contorno, risulterà nota (a meno di una costante) la u nei punti del contorno stesso, e poi anche la derivata normale di u, che vale $\mathbf{N} \times \mathbf{s}$.

Meccanica — *Sopra le correnti liquide spontanee* [2]. Nota di Umberto Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

Nella Nota precedente ho dato un esempio di effettiva esistenza di correnti liquide spontanee, immaginando che il moto liquido piano avvenga in una corona circolare e sia simmetrico rispetto al centro.

Nella presente Nota mi propongo di mostrare che l'esempio addotto rappresenta *l'unica soluzione* possibile che corrisponda ad una corrente spontanea *irrotazionale*, che si svolge in un campo anulare (del tipo « corona circolare » dal punto di vista della connessione).

1. Nel caso *irrotazionale* il problema è condotto alla ricerca di due linee libere λ e μ, e di una funzione $\Psi(x, y)$ (funzione di corrente), armonica nello spazio A compreso tra λ e μ (vedi la figura della Nota I), e tale che sia $\Psi = 0$ sopra λ e $\Psi = q$ sopra μ, e di più che il $\Delta_1 \Psi$

(1) Boggio, *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane*, n. 8, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXV, 1899-1900. In questa Nota ho considerato solo il caso del piano, ma quelle considerazioni sono valide anche per lo spazio.

(2) Cfr. questi Rendiconti Nota I, pag. 10.

assuma un valore costante tanto su λ che su μ, eventualmente distinti tra loro.

Una tale funzione Ψ è legata alle componenti u e v della velocità, in un generico punto (x, y), dalla relazione differenziale

$$d\Psi = -v\,dx + u\,dy. \tag{1}$$

Essendo la Ψ armonica in A, si potrà definire (a meno di una costante additiva) la funzione associata φ (*potenziale di velocità*), mediante l'equazione ai differenziali totali

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy. \tag{2}$$

Posto

$$\begin{cases} x + iy = z, \\ u - iv = w, \\ \varphi + i\Psi = f, \end{cases} \tag{3}$$

w ed f riescono, com'è ben noto, funzioni della variabile complessa z, a causa delle (1) e (2); e le (1) e (2) stesse si compendiano nella relazione seguente:

$$\frac{df}{dz} = w. \tag{4}$$

Chiamando V il valore assoluto della velocità, avremo

$$V = |w| = \underset{1}{\Delta}\Psi = \underset{1}{\Delta}\varphi.$$

La V non va mai a zero e deve assumere valori costanti sopra λ e μ.

Prendiamo, ciò che è sempre lecito con opportuna scelta dell'unità di velocità,

$$V = \begin{cases} 1 & \text{sopra } \lambda, \\ e^{\beta} & \text{sopra } \mu, \end{cases} \tag{5}$$

designando β una costante.

2. Introduciamo ora una funziono

$$\omega(z) = \vartheta + i\tau,$$

con ϑ e τ funzioni reali degli argomenti x e y, legata alla velocità w dalla relazione

$$w = e^{-i\omega}. \tag{6}$$

Essendo

$$V = |w| = e^{\tau},$$

le (5) esigono che sia

(7) $$\tau = \begin{cases} 0 \text{ sopra } \lambda, \\ \beta \text{ sopra } \mu, \end{cases}$$

essendo $\tau(x, y)$ armonica e ovunque regolare nel campo A.

Ciò posto prendiamo in esame i coefficienti dell'unità immaginaria i nelle funzioni $f(z)$ e $\frac{q}{\beta}\omega(z)$, cioè le due funzioni $\Psi(x, y)$ e $\frac{q}{\beta}\tau(x, y)$: entrambi sono armoniche e regolari in A e prendono al contorno $\lambda + \mu$ i medesimi valori 0 e q, ne segue

$$\Psi = \frac{q}{\beta}\tau \quad , \text{ in A}.$$

La identità della parti immaginarie delle funzioni $f(z)$ e $\frac{q}{\beta}\omega(z)$ porta come conseguenza la identità (a meno di una costante additiva) delle parti reali e quindi, a meno di una inessenziale costante reale, la identità delle funzioni stesse.

Dovremo avere così

(8) $$\omega(z) = \frac{\beta}{q} f(z).$$

Quest'ultima unitamente alle (4) e (6), dà luogo all'equazione differenziale

$$\frac{dz}{df} = e^{\frac{\beta i}{q} f(z)},$$

che integrata porge

(9) $$z - z_0 = -i\frac{q}{\beta} e^{\frac{\beta i}{q} f(z)}.$$

Da questa scende che le linee di flusso $\Psi =$ costante, tra le quali vi sono appunto le linee libere λ e μ, sono circonferenze concentriche.

Il che prova il nostro asserto.

Osservazione. — In particolare per $\beta = 0$, le linee di flusso divengono rette parallele; e per le (8) e (6) si ha $w = 1$. In tal caso la corrente liquida si riduce ad una traslazione uniforme, e di velocità unitaria, della porzione indefinita A di piano.

Matematica. — *Su la continuità e la derivabilità di un integrale rispetto ad un parametro.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Sia $f(x,y)$ una funzione di x e y data in un campo C, che dapprima, per semplicità, supporremo rettangolare e limitato dalle rette $x=a$, $x=b'$ $(a<b')$, $y=c$, $y=d$, $(c<d)$. Supponendo la $f(xy)$ linearmente integrabile [1] rispetto ad x in tutto C, l'integrale

$$\int_a^b f(xy)\,dx = F(y), \tag{1}$$

$(a \leq b \leq b')$ risulta funzione di y in tutto l'intervallo (c,d).

Ci domandiamo, allora: sotto quali condizioni per la $f(x,y)$ la $F(y)$ risulta continua?

1. Una condizione sufficiente è quella ben nota della continuità di $f(xy)$ rispetto all'insieme delle variabili (x,y). Questa, però, è troppo restrittiva e già se ne conosce una più larga, data dal prof. Arzelà [2] il quale suppone la $f(x,y)$ limitata in tutto il campo C e continua rispetto ad y.

Relativamente alle ipotesi di questa seconda condizione, si possono fare due osservazioni. In primo luogo non è necessario supporre la continuità di $f(xy)$ rispetto ad y in tutto C: può benissimo, tale continuità, mancare completamente lungo le rette $x=m$, per tutti i valori di m $(a \leq m \leq b)$ di un insieme di misura lineare nulla (per es., per tutti i valori razionali di m). Ciò perchè il teorema sull'integrazione per serie, che entra in gioco nella dimostrazione, conserva ancora la sua piena validità. In secondo luogo, si può osservare che, alla condizione, per la $f(xy)$, di essere limitata in tutto C, possono sfuggire i punti di un insieme che sia di misura lineare nulla su ogni retta $y=$ cost. Anche qui la ragione sta nel fatto che il già accennato teorema sull'integrazione per serie continua a sussistere.

2. Ci si può domandare: per la continuità di $F(y)$ è necessario supporre la continuità di $f(xy)$, rispetto ad y, su tutte le rette $x=m$, ad eccezione al più dei valori m di un insieme di misura nulla? La risposta è negativa. Si prenda, per es., per campo C il quadrato di vertici opposti

[1] Per la massima generalità dei risultati intenderemo di parlare sempre di integrabilità nel senso del Lebesgue.

[2] *Sugli integrali di funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono altre variabili.* Rend. R. Acc. delle Sc. di Bologna, 1887; *Sulle serie di funzioni*, Parte seconda. Mem. R. Acc. Sc. di Bologna, 1900.

$(0,0), (1,1)$, e si definisca la $f(xy)$ nel seguente modo: essendo α un numero qualunque soddisfacente alla condizione $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, sia sulle rette $y = 1 - \alpha, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2^2}, \frac{1-\alpha}{2^3}, \dots, f(xy) = 1$ per $x \neq 2\alpha$, $f(x, y) = 0$ per $x = 2\alpha$; sia, poi, $f(x, 0) = 1$. Sul lato $(0,0), (1,0)$ la $f(xy)$ è, allora, discontinua in tutti i punti, rispetto ad y; eppure la $F(y) = \int_0^b f(xy)\, dx$, $(0 \leq b \leq 1)$ è continua, perchè è sempre $F(y) = b$.

3. Relativamente al caso in cui esistano punti nell'interno dei quali la funzione $f(xy)$ non resta limitata, il prof. Arzelà [1] ha dimostrata la continuità di $F(y)$ per $y = \bar{y}$, nelle seguenti ipotesi: 1) sulla retta $y = \bar{y}$ l'insieme dei punti detti è numerabile; 2) sulla medesima retta la $f(xy)$ è continua rispetto ad y; 3) l'integrale $\int_a^b f(x, y)\, dx$ ammette limite, al tendere di y a $\bar{y}$, e questo limite è continuo rispetto all'estremo b. Ora, quest'ultima ipotesi, benchè necessaria, è, nella pratica, molto difficile a constatarsi; è, quindi, utile dare una proposizione la quale non abbia bisogno di supporla verificata.

Dimostreremo, perciò, che *se la $f(x, y)$ ammette su ogni retta $x = m$ — ad eccezione, al più, dei valori di m di un insieme di misura nulla — la derivata parziale rispetto ad y, soddisfacente alla condizione*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < M_m, \tag{2}$$

dove M_m è un numero positivo che può variare con m; e se, inoltre, la $\frac{\partial f}{\partial y}$ è su C superficialmente integrabile, allora l'integrale (1) *è una funzione continna di y.* Si ha, infatti,

$$\int_a^b f(x, y+h)\, dx - \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b [f(x, y+h) - f(xy)]\, dx$$
$$= \int_a^b dx \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

Ma, per essere $\frac{\partial f}{\partial y}$ superficialmente integrabile, è [2]

$$\int_a^b \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\, dx = \int_a^b dx \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \int_y^{y+h} dy \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\, dx;$$

si ha, perciò,

$$\int_a^b f(x, y+h)\, dx - \int_a^b f(xy)\, dx = \int_y^{y+h} dy \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\, dy,$$

[1] Loc. cit.

[2] Fubini, *Sugli integrali multipli.* Rend. R. Acc. dei Lincei, 1907.

e quindi

$$\lim_{h=0}\int_a^b f(x\,,y+h)\,dx=\int_a^b f(xy)\,dx\,.$$

Osservazione I. — Invece della $\frac{\partial f}{\partial y}$, si può porre che alla (2) soddisfi il rapporto incrementale di $f(xy)$ rispetto ad y. Si vede, perciò, che la proposizione precedente vale anche quando la $\frac{\partial f}{\partial y}$ manca in tutti i punti della retta $y=\text{cost}$.

Osservazione II. — Alla prima delle condizioni poste nel precedente enunciato si può sostituire l'altra, più generale, che sulle rette $x=m$ la $\frac{\partial f}{\partial y}$ sia solamente finita, purchè la $f(x\,,y)$ sia, ivi, a variazione limitata rispetto ad y; si può anche sostituire la condizione che sulle rette $x=m$ la $f(xy)$ sia, rispetto ad y, *assolutamente continua* (1).

4. Relativamente alla continuità di (1) possiamo anche dire che *se $f(x\,,y+h)$ converge, sempre crescendo per tutti gli x, o sempre decrescendo, a $f(x\,,y)$, al tendere di k a zero per valori positivi, e parimenti per valori negativi, la* (1) *è funzione continua di y.* Ciò risulta dal fatto che, per l'ipotesi fatta, esiste il limite dell'integrale $\int_a^b f(x\,,y+h)\,dx$ per $k=+0$, ed anche per $k=-0$, e quindi che si può applicare un teorema di B. Levi (2) sull'integrazione delle serie a termini positivi.

La (1) *è ancora continua rispetto ad y se sono verificate le seguenti ipotesi:* 1) *il quadrato di $f(xy)$ è integrabile rispetto ad x ed è, in tutto* C,

$$\int_a^b f^2(xy)\,dx<\mathrm{M}$$

con M *numero positivo fisso*; 2) *la $f(xy)$ è continua rispetto ad y, eccettuate al più le rette $x=m$, per i valori di m di un insieme di misura nulla.* Questa proposizione risulta da un teorema sull'integrazione per serie dato da F. Riesz (3).

(1) Una funzione $f(x)$ dicesi *assolutamente continua* in $(a\,,b)$ se, preso un numero positivo σ piccolo a piacere, esiste poi sempre un corrispondente numero μ, maggiore di zero, tale che sia $|\Sigma\{f(\beta_i)-f(\alpha_i)\}|<\sigma$, dove la sommatoria è estesa ad un qualsiasi gruppo d'intervalli $(\alpha_i\,,\beta_i)$, due a due distinti di $(a\,,b)$, avente una misura minore di μ (Cfr. Vitali, *Sulle funzioni integrali*. Atti R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. XL).

(2) Rend. Istituto Lombardo, 1906.

(3) Comptes rendus, 18 marzo 1907.

5. Le proposizioni precedenti valgono, come si vede facilmente, anche se i limiti dell' integrale (1), invece di essere fissi, variano in modo continuo al variare di y. Esse, inoltre, dànno altrettante condizioni relative all' integrale

$$\int_a^\infty f(xy)\,dx\,.$$

Si potrà, infatti, asserire la continuità di quest' integrale ogni qualvolta si sappia che l'altro integrale $\int_a^b f(xy)\,dx$ è continuo, per ogni $b > a$, e converge al primo in modo *quasi uniforme* [1].

Come caso particolare si ha la continuità di

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,k(xy)\,dx \tag{3}$$

nelle seguenti ipotesi: 1) la funzione $\varphi(x)$ data in (a, ∞), è monotòna e tendente a zero per $x = \infty$; 2) la $k(xy)$, data per ogni x di (a, ∞) e per ogni y di (c, d), è continua rispetto ad y e *limitata in ogni campo limitato*; 3) per ogni p e q di (a, ∞) e per ogni y di (c, d) è

$$\left|\int_p^q k(xy)\,dx\right| < \mathrm{M},$$

con M numero positivo fisso [2].

Si ha la continuità di 3) anche nelle seguenti ipotesi: 1) le funzioni $\varphi(x)$, $k(xy)$ sono limitate in tutto il campo $a \leq x < \infty$, $c \leq y \leq d$; 2) esiste $\int_a^\infty |\varphi(x)|\,dx$; 3) la $k(xy)$ è continua rispetto ad y.

6. Occupiamoci, ora, della derivabilità dell' integrale 1), rispetto ad y. L'Arzelà (luogo citato) ha dimostrato che, se la $f(xy)$ ammette la derivata parziali rispetto ad y limitata in tutto C, la F(y) è derivabile e vale la formola

$$\frac{d\mathrm{F}(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx \tag{4}$$ [3].

(1) Cfr. Arzelà, loc. cit.

(2) Cfr. Pierina Quintili, *Sulla continuità di un integrale rispetto ad un parametro.* Rend. R. Acc. dei Lincei, novembre 1908 e maggio 1909.

(3) Veramente l'Arzelà aggiunge la condizione dell'integrabilità di $\frac{\partial f}{\partial y}$ rispetto ad x. Per noi, che adottiamo la definizione di integrale del Lebesgue, questa integrabilità risulta dal fatto che la $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h=0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$, come limite di funzione misurabile, è misurabile e perciò, essendo limitata, integrabile.

Inoltre ha anche dimostrato che, se la $\frac{\partial f}{\partial y}$ è integrabile rispetto ad x, e su ogni retta $y = \text{cost}$ è numerabile il gruppo dei punti negli intorni circolari dei quali la derivata detta non è limitata, allora esiste la $\frac{dF}{dy}$ e vale la (4) *tutte le volte che la* F(y) *ammette le derivate destra e sinistra, e queste sono continue rispetto all'estremo* b *dell'integrale* (1).

Se la $\frac{\partial f}{\partial y}$ non è limitata in tutto C, cosa si potrà dire della derivabilità di F(y) qualora non si sappia nulla circa l'esistenza e la continuità, rispetto a b, delle sue derivate destra e sinistra?

Supponiamo che in tutto C esista la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}$, integrabile superficialmente ed anche linearmente rispetto ad x [1]. Inoltre, la $f(x, y)$ sia, rispetto ad y, una funzione *assolutamente continua*, per ogni x di (a, b') — ad eccezione al più di un insieme di misura nulla. È allora,

$$\frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^b [f(x, y+h) - f(xy)]\, dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_a^b dx \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \frac{1}{h}\int_y^{y+h} dy \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\, dx \quad [2].$$

E perciò: *condizione necessaria e sufficiente affinchè, nelle ipotesi poste, esista* $\frac{dF}{dy}$ *e valga la* (4), *è che* $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\, dx$ *sia la derivata del suo integrale, rispetto ad* y.

Possiamo, in particolare, dire che *esiste la* $\frac{dF}{dy}$ *e vale la* (4) *se la* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *esiste, è superficialmente integrabile, e su ogni retta* $x = m$ *— eccettuati al più i valori di* m *di un insieme di misura nulla — soddisfa alla disuguaglianza*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < M_m;$$

ed inoltre è soddisfatta una delle due condizioni: 1) *la* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *è continua rispetto ad* y, *ha il quadrato integrabile rispetto ad* x *ed è*

$$\int\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 dx < M;$$

[1] L'ipotesi dell'integrabilità superficiale porta già con sè l'integrabilità rispetto ad x per tutti i valori di y di C, eccettuati quelli di un insieme di misura nulla.

[2] Ved. Fubini, loc. cit.

2) *la* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *è integrabile rispetto ad* x, *e ad essa tende la* $\frac{\partial f(x,y+h)}{\partial y}$, *sempre crescendo per tutti gli* x *(o sempre decrescendo), al tendere di* h *a* $+0$; *e parimenti al tendere di* h *a* -0.

Sia, poi, per ogni $b > a$, $\int_a^b f(xy)\,dx$ derivabile e valga la (4); l'integrale $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ tenda in modo *quasi uniforme a* $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$, rimanendo però sempre inferiore, in modulo, ad un numero fisso; allora $\int_a^\infty f(xy)\,dx$ sarà derivabile e varrà la formola

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(xy)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx .$$

Astronomia — *Sopra talune recenti osservazioni di Marte.* Nota del dott. Vincenzo Cerulli, presentata dal Socio E. Millosevich.

Nella *grande opposizione* del 1909, Marte ha raggiunto il diametro apparente di 24″ ed è stato possibile, nel grande telescopio di 83 centimetri, dell'osservatorio di Meudon (Parigi) osservarlo con ingrandimenti che arrivarono agli 800 diametri. Il pianeta è venuto, per tal modo, a presentarsi come una palla di 23 millimetri di diametro, vista da 25 centimetri di distanza. È merito del prof. Deslandres, direttore dell'Osservatorio, l'aver pensato di dedicare a Marte, nelle notti dell'opposizione, quel magnifico refrattore che è fra i migliori usciti dall'officina dei celebri Henry. Ed è merito non minore l'averlo affidato al valente areografo Antoniadi, il quale ha potuto in poche notti rendersi conto della trasformazione che l'immagine di Marte, data dai piccoli telescopî, subiva nel telescopio gigantesco.

Mi sembrano degni di esser conservati alla storia dell'Areografia. e perciò ho l'onore di affidarli ai Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, taluni brani salienti delle lettere che l'Antoniadi ha avuto la cortesia di scrivermi durante il corso delle sue osservazioni:

In data 29 settembre 1909 egli mi segnalava che « Mars appears covered with *natural* spots, most irregular in outline and intensity. There was no trace whatever of geometrical patterns, although details much more delicate than the canal system were held quite steadily. Indeed, the amount of irregular markings visible was such that it would have been a titanic feat to represent it faithfully: hence my drawing does not give more than the two-thirds of the objects seen ».

4 ottobre. « Tous les prodigieux détails, révelés par la grande lunette, et que l'on voyait sans aucune difficulté, étaient tous excessivement irréguliers de forme et de ton, et je n'ai eu des sensations de lignes droites (visibles isolément chacune) que pendant une seconde en tout sur 4 heures ».

12 ottobre. « Quelle structure complexe que celle du Mare Sirenum, et quelle drôle de forme qu'a cette Thaumasia, vraiment *Θαυμασία*! L'aspect géométrique du Ganges et de sa bande claire à droite est un effet de mauvaises images. Hier soir au moment du calme relatif (car il y avait un vent faible de SW) mon attention était toute entière concentrée sur l'aspect du Solis lacus et lorsque j'ai commencé l'étude du Ganges, l'image était bien agitée. C'est alors que les taches affectaient une forme surnaturelle et géométrique ».

6 novembre. « Les canaux de Schiaparelli ont une base objective, mais il n'y a aucune géométrie dans tout cela. Comme vous le dites, c'est une intégration de taches éparses que l'on voit comme une ligne. C'est là un escamotage de l'oeil. Avec le 83^{cm} je vois Mars deux fois plus près de la Terre, qu'à Milan, et alors les grands canaux s'évanouissent en estompages informes, toujours irréguliers comme les taches de la Lune. Pendant quelques secondes le 6 octobre, j'ai vu sur Amazonis la véritable structure des taches désertiques martiennes. Il y avait une merveilleuse agglomération de taches faibles irrégulières agrémentées de marbrures ondoyantes...

...Tout cela avait un aspect *naturel* admirable, qu'aucun artiste ne saurait rendre ».

23 novembre. « Comme vous le savez, l'objectif de $0^m.83$ est *hostile* aux aspects géométriques. Son grand pouvoir séparateur tend à décomposer en taches irrégulières tous les canaux à base objective. Tous les canaux de la région du *Mare Cimmerium* se décomposent en masses irrégulières disjointes, ou bien en bords d'ombres diffuses ».

Ognuno vede l'importanza di queste osservazioni e come esse lascino sperare per un'epoca assai prossima un progresso essenziale dell'areografia. Esse ci dimostrano che i telescopî giganteschi dell'età presente sono già capaci di darci la topografia di Marte. Mentre però il Marte vero, il Marte preconizzato dalla teoria ottica, comincia ad apparire, comincia d'altra parte a rivelarsi insufficiente l'opera dell'areografo visuale, anche il più provetto. Se nella prima lettera l'Antoniadi dichiarava di aver potuto disegnare appena i due terzi delle cose viste, nelle altre lettere egli spiega meglio il suo pensiero dicendo che i particolari dell'immagine erano tanti da sfidare la facoltà comprensiva e rappresentativa di qualsiasi artista. Insomma, per usare un'altra frase dello stesso Antoniadi, il disegno del Marte naturale è un'opera titanica! Fortunatamente, l'abilità dell'osservatore, toccando al suo limite, trova un prezioso surrogato nella fotografia. Finora questa ha dato immagini di Marte troppo piccole (non escluse quelle

ottenute ultimamente dal prof. Hale), nelle quali la separazione dei particolari si fa con difficoltà non minore di quella che s'incontra visualmente nei piccoli telescopî. Ma da studî ed esperimenti che mi è riuscito di fare mediante una piccola camera di Barlow, applicata al refrattore di 39 cm. di Teramo (Collurania), io mi sento in grado di ritenere che in un telescopio di un metro e mezzo di apertura, come quello di M. Wilson, *debba* essere possibile prendere delle *istantanee* di Marte, con 20 millimetri di diametro.

Facciamo voti che questo desiderio si realizzi al più presto.

Mineralogia. — *Una varietà di calcite cobaltifera di Capo Calamita nell'isola d'Elba.* Nota di Federico Millosevich, presentata dal Socio G. Struever.

Nel riordinamento a cui mi sono accinto delle importantissime collezioni Elbane di questo Museo Mineralogico di Firenze, mi si è data occasione di osservare un campione della collezione Foresi, classificato come eritrite, ma che già a prima vista mostra caratteri del tutto differenti da quelli del *flos cobalti*. Di questo ha soltanto il bel color roseo vivo, mentre per la struttura e l'apparenza esterna ricorda la sferocobaltite. Per questa ragione e per il fatto di trovarsi il mio minerale insieme con calcite biancastra, alla quale passa anche per varie sfumature di colore, mi sembrò che potesse trattarsi di una miscela di carbonati di calcio e di cobalto; e poichè miscele cobaltifere nella serie dei carbonati romboedrici non sono molto frequenti, parvemi valesse la pena di indagare più intimamente la costituzione del minerale in questione.

Esso proviene dalla località Francesche al Mare presso Capo Calamita, dalla quale provengono pure i noti campioni di eritrite. Si trova come questi sopra una roccia limonitica e in parte magnetitica assai compatta e lo accompagna una *calcite* opaca biancastra e lievemente rosea qua e là coperta di *limonite*, della quale calcite sembra essere di formazione posteriore. Non si presenta in cristalli distinti, ma in massa cristallina a struttura sferoidale lamellare. È abbastanza fragile con sfaldatura romboedrica. Il peso specifico è di 2,75, superiore cioè a quello della calcite. Durezza un po' superiore a quella della calcite normale (spato di Islanda).

Lucentezza vitrea; colore roseo vivo come il fiore di pesco, con lieve tendenza al violaceo. La colorazione non è assolutamente uniforme in tutta la massa: ma dove più, dove meno intensa.

Saggi chimici qualitativi dimostrano che il minerale è un carbonato contenente moltissimo ossido di calcio, poco ossido di cobalto, quantità minime di ossidi di ferro e di magnesio e tracce appena di ossido di manganese.

Infatti l'analisi quantitativa diede i seguenti risultati:

CaO . . .	54,41
CoO . . .	1,27
FeO . . .	0,15
MgO . . .	0,27
MnO . . .	tr.
CO_2 . . .	43,55
	99,65

Calcolando con la quantità di ciascun ossido trovata la corrispondente quantità di anidride carbonica, la composizione del minerale risulta la seguente:

$CaCO_3$ . .	97,16
$CoCO_3$ . .	2,02
$FeCo_3$ . .	0,24
$MgCO_3$ . .	0,56
	99,98

La costituzione chimica è quindi quella di una varietà di calcite cobaltifera che ben opportunamente si può chiamare, seguendo la nomenclatura più razionale adottata già per altre varietà del medesimo minerale, *cobalto-calcite.*

Non vorrei chiamare nuova tale varietà, sebbene questa mia, a quanto mi è dato conoscere, sia la prima analisi di una vera calcite cobaltifera, perchè nella letteratura mineralogica si trovano già cenni intorno a varietà di calciti cobaltifere, per quanto incompleti e non accompagnati da analisi. Così Breithaupt (1) fra i suoi *problematische Karbonite* cita quattro varietà di *pfirsichblütrothe Kohlensaures Kobaltoxyd enthaltende Karbonite*, una di Riechelsdorf, due di Schneeberg ed una di Przibram (quest' ultima contenente anche ossido manganoso e magnesia) nelle quali potè constatare, con saggi al cannello la presenza di ossido di cobalto.

Weisbach (2) parla della esistenza di calcite cobaltifera rosea cristallizzata di Schneeberg e di altre località, ma non ne dà analisi. Così Groth (3) ricorda semplicemente la medesima varietà di Schneeberg tinta in rosso da carbonato di cobalto.

Invece Gibbs (4) ci ha fatto conoscere la composizione della varietà di Przibram ricordata da Breithaupt che è, non una calcite, ma una vera dolomite cobaltifera con 5,17 % di ossido di cobalto.

(1) Breithaupt August. *Vollständiges Handbuch der Mineralogie*, II, Band 1841, pag. 243.

(2) Weisbach A., *Kobaltspath, ein neues Glied der Kalkspathgruppe.* Jahrbuch f. d. Berg. u. Hüttenwesen im Königreich Sachsen, 1877.

(3) Groth P, *Die Mineraliensammlung Strassburg*, 1878, pag. 122.

(4) Gibbs W., *Zerlegung eines Kobalthaltigen Braunspathes.* Pogg. Annalen, *71*, 361.

Biologia. — *Alcune osservazioni sulla presenza di Leishmanie nei cani*. Nota di C. Basile, presentata dal Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich offre, a nome dell'autore dott. Eredia, la pubblicazione intitolata: *I venti in Italia*, e ne parla.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Millosevich comunica i seguenti elenchi di concorrenti ai premi scaduti col 31 dicembre 1909:

Elenco dei lavori presentati al concorso al Premio Reale per la *Fisiologia normale e patologica*.

(Scadenza 31 dicembre 1909. — Premio L. 10.000).

1. Barbieri Nicola Alberto. 1) « Le radici dorsali o posteriori dei nervi spinali sono motorie, centrifughe e trofiche » (ms.).

2. Bocci Balduino. 1) « Il senso dei colori e la legge dell'ereditarietà » (st.). — 2) « Note ed appunti di tecnica fisiologica » (st.). — 3) « La immagine visiva cerebrale, ovvero i nuovi orizzonti dell'ottica fisiologica e i necessarî confini dell'ottica fisica » (st.). — 4) « L'immagine visiva cerebrale » (st.). — 5) « Le fibre ottiche e la cellula nervosa dei centri visivi » (st.). — 6) « La funzione del nervo simpatico nell'accomodazione oculare » (st.). — 7) « Studî critici e sperimentali intorno ad alcune questioni controverse di Fisiologia. Parte I: Fisiologia del sistema nervoso. Parte II: La Vescica urinaria come organo espulsivo. La fibra muscolare liscia » (st.).

3. Bottazzi Filippo. 1) « La fisiologia del simpatico, secondo le ricerche di J. N. Langley e dei suoi collaboratori » (st.). — 2) « Trattato di Chimica fisiologica ». — 3) « Traduzione in italiano dall'inglese dell'opera: Trattato di fisiologia di M. Foster » (st.). — 4) « Sulle proprietà dei nucleoproteidi » (st.). — 5) (e Cappelli) « Il sodio e il potassio negli eritrociti del sangue di diverse specie animali e in varie condizioni fisio-patologiche » (st.). — 7) « Ricerche fisiologiche sul sistema nervoso viscerale delle Aplisie e di alcuni Cefalopodi » (st.). — 7) « Azione del vago e del simpatico sugli

atrii del cuore dell'*Emys europaea* » (st.). — 8) « Sull'azione fisiologica dei saponi » (st.). — 9) « Di una nuova nomenclatura nella fisiologia comparata del sistema nervoso » (st.). — 10) (e Enriques) « Sulle proprietà osmotiche delle ghiandole salivari posteriori dell'*Octopus macropus*, nel riposo e in seguito all'attività secretiva » (st.). — 11) « Ancòra dell'azione del vago e del simpatico sugli atrii del cuore dell'*Emys europaea* » (st.). — 12) « Contributi alla fisiologia comparata della digestione. I. La funzione digerente nell'*Aplysia limacina*. II. Composizione chimica dell'epato-pancreas » (st.). — 13) «Intorno all'origine dell'acetone nell'organismo » (st.). — 14) « Del tannino come mezzo per dealbuminizzare i liquidi organici » (st.). — 15) « L'innervazione viscerale nei Crostacei e negli Elasmobranchi » (st.) — 16) « Sulle proprietà osmotiche delle membrane viventi » (st.). — 17) (e Orefici) « Ricerche sull'acetonuria e sul metabolismo dei corpi azotati nei bambini difterici » (st.). — 18) (e Orefici) « Ricerche chimiche in due casi di leucemia » (st.). — 19) « Biologia e Filosofia » (st.). — 20) « Leonardo da Vinci filosofo-naturalista e fisiologo » (st.). — 21) « Un mezzo assai semplice per ottenere grandi masse di cellule epiteliali » (st.). — 22) « Gelatinificazione della soluzione di un proteide epatico operata dall'idrato potassico » (st.). — 23) « Proprietà di nucleoproteidi estratti dalla placenta muliebre » (st.). — 24) « Esperimenti di autodigestione in soluzioni di proteidi epatici » (st.). — 25) (e Onorato) « Presentazione di una cagna con fistola ureterale permanente » (st.) — 26) « Ricerche sulla composizione chimica della placenta muliebre » (st.). — 27) « Circa alla funzione biologica del calcio » (st.). — 28) (e Pierallini) « Contributi alla conoscenza della funzione dei reni. I. Di alcune modificazioni del sangue e dell'orina nei nefritici » (st.). — 29) « Azione della « Paraganglina Vassale » sull'esofago e sullo stomaco del *Bufo vulgaris* » (st.). — 30) (e Gaufini) « Ricerche istologiche sull'atrio del cuore di *Emys europaea* » (st.). — 31) « Nuove ricerche sulle « oscillazioni del tono » degli atrii cardiaci di *Emys europaea* » (st.). — 32) « Di un riflesso inibitorio nell'esofago del *Bufo vulgaris* » (st.). — 33) « Ricerche sul *sinus venosus* dell'*Emys europaea* » (st.). — 34) (e Torretta) « Azione dell' « adrenalina » sulla muscolatura longitudinale dell'esofago di *Bufo vulgaris* » (st.). — 35) (e Onorato) « Sulla funzione dei reni sperimentalmente alterati » (st.). — 36) « Proprietà chimiche e fisiologiche delle cellule epiteliali del tubo gastro-enterico » (st.). — 37) « Ricerche sulla genesi del tetano muscolare » (st.). — 38) « Le « curve di secondo e di terzo ordine » del tracciato della pressione arteriosa nei cani » (st.). — 39) « Sui movimenti automatici di certi muscoli striati » (st.). — 40) « La corrente dell'energia per gli organismi viventi » (st.). — 41) « Ancòra delle relazioni di Leonardo da Vinci con Marco Antonio della Torre e Andrea Vesalio » (st.). — 42) (e Costanzi) « Nuove ricerche sull'azione dell'adrenalina (Clin) e della paraganglina (Vas-

sale) » (st.). — 43) (e Sturchio) « Sull'origine della pressione osculare » (st.). — 44) « Sulla regolarizzazione della pressione osmotica negli organismi animali. I. Pressione osmotica e conduttività elettrica dei liquidi di animali acquatici » (st.). — 45) « Sulla regolarizzazione della pressione osmotica ecc. II. Resistenza dei corpuscoli rossi di *Scyllium* e di *Sipunculus* a cedere rispettivamente l'emoglobina e l'emeritrina » (st.). — 46) « Gli avvenimenti chimici nell'organismo animale e l'azione dei fermenti intracellulari » (st.). — 47) « Il metodo sperimentale nelle discipline biologiche » (st.). — 48) « Elementi di Chimica fisica » (st.). — 49) « La Stazione zoologica di Napoli e l'incremento della fisiologia comparata » (st.). — 50) « Sulla regolarizzazione della pressione osmotica ecc. III. Pressione osmotica e conduttività elettrica del succo muscolare, del siero del sangue e dell'orina dei pesci » (st.). — 51) « Leonardo da Vinci. Conferenza » (st.). — 52) « Leonardo da Vinci e la biologia moderna » (st.). — 53) « Rassegna scientifica » (st.). — 54) « Rassegna di Fisiologia » (st.). — 55) « Ricerche sulla muscolatura cardiale dell'*Emys europaea* » (st.). — 56) « Leonardo da Vinci naturalista » (st.). — 57) « Problemi di Biologia » (st.). — 58) « Grassi e glucogeno nel fegato dei Selacii » (st.). — 59) « Saggi su Leonardo da Vinci. I. Leonardo da Vinci anatomico » (st.). — 60) « Ricerche sulla regolarizzazione della pressione osmotica ecc. IV. Origine dell'urea nei Selacii » (st.). — 61) « Problemi di Biologia. II. Lo stato colloidale della materia nei suoi rapporti coi processi vitali » (st.). — 62) « La contrazione muscolare » (st.). — 63) « Teorie della funzione del cuore » (st.). — 64) « Lo stato colloidale della materia ecc. » (st.). — 65) « Proprietà chimiche e fisiologiche delle cellule epiteliali del tubo gastro-enterico » (st.). — 66) « Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. I. Il « tempo di deflusso » del siero del sangue di alcuni animali marini e terrestri » (st.). — 67) « Ricerche ecc. II. Il contenuto in azoto proteico del siero del sangue di diversi animali » (st.). — 68) (e Buglia e Jappelli) « Ricerche ecc. III. Variazioni della conduttività elettrica, viscosità e tensione superficiale del siero del sangue durante la dialisi » (st.). — 69) (e Scalinci) « Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina. I. Alcune osservazioni preliminari sui liquidi oculari » (st.). — 70) « Fisiologia della nutrizione » (st.). — 71) (e Scalinci) « Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina. II. Le proteine della lente cristallina » (st.). — 72) (id.) « Ricerche ecc. III. Imbibizione della lente cristallina in acqua e in vapor d'acqua » (st.). — 73) (id.) « Ricerche ecc. IV. Disimbibizione della lente in aria secca e riimbibizione di essa in acqua e in vapor d'acqua » (st.). — 74) (id.) « Ricerche ecc. V. Imbibizione della lente nei liquidi oculari » (st.). — 75) (id.) « Ricerche ecc. VI. Imbibizione della lente in soluzioni di NaCl di diversa concentrazione » (st.). — 76) (id.) « Ricerche ecc. VII. Imbibizione della lente immersa per molte ore in due soluzioni di NaCl molto concentrate. — VIII. Imbibizione della lente

in vapor d'acqua a diversa tensione. — IX. Imbibizione della lente scapsulata in soluzioni 0,2 n e 1,709 n di NaCl e nel vapor d'acqua sopra queste soluzioni » (st.). — 77) « Sulla tecnica delle ricerche di trasporto elettrico (e di dialisi) dei colloidi organici » (st.). — 78) « Azione coagulante e peptolitica di estratti pancreatici » (st.). — 79) « La chimica fisica e la biologia animale » (st.). — 80) « Nuove ricerche sui muscoli lisci » (st.). — 81) « Sul trasporto elettrico del glicogeno e dell'amido » (st.). — 82) « Trasporto elettrico e scomposizione elettrolitica del cloroformio » (st.). — 83) « Leonardo fisiologo e anatomico » (st.). — 84) « Ricerche sulle soluzioni di colloidi organici » (st.). — 85) « Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina. XI. Imbibizione della lente in acqua a diverse temperature, in acidi e in alcali » (st.). — 86) « Ricerche ecc. XII. Influenza del NaCl sull'imbibizione della lente immersa in soluzioni acide e di NaOH » (st.).

4. Cirillo Nicola. 1) « Sulla struttura e meccanismo del corpo umano » (ms.).

5. Fichera Gaetano. 1) « Etiologia del cancro » (st.). — 2) « Sui processi di riparazione e di compenso per interventi sull'ovaia » (st.). — 3) « Sugli innesti di tessuti embrionali e fetali » (st.). — 4) « Sulla ipertrofia della ghiandola pituitaria consecutiva alla castrazione » (st.). — 5) « Sui poteri di difesa contro il diplococco pneumonico » (st.). — 6) « Batterioterapia e indice opsonico » (st.). — 7) « Sulla distruzione del glucogeno in varie specie di glicosuria sperimentale » (st.). — 8) « Sul circolo collaterale » (st.). — 9) « Sulla distruzione dell'ipofisi » (st.). — 10) « Contributo sperimentale allo studio della Fisio-patologia della mucosa gastrica » (st.). — 11) « Della meccanomorfosi in patologia. L'influenza dei fattori funzionali sui processi di riparazione » (st.). — 12) « Per lo studio della struttura normale e patologica del sistema nervoso. Nuovi metodi di indagine microscopica » (st.). — 13) « L'iperemia da stasi nelle infezioni acute » (st.).

6. Galeotti Gino. 1) (e Giampalmo) « Ricerche sulle lecitalbumine » (st.). — 2) « Sulle proprietà osmotiche delle cellule » (st.). — 3) « Ricerche fisico-chimiche sull'edema » (st.). — 4) « Sulla diffusione degli elettroliti nei colloidi » (st.). — 5) « Effetto dei narcotici sulla permeabilità della pelle di rana e sulle forze elettromotrici che da essa si sviluppano » (st.). — 6) « Sui fenomeni elettrici dello stomaco della rana » (st.). — 7) (e Todde) « Alterazioni istologiche provocate da soluzioni metalliche colloidali o elettroliticamente dissociate » (st.). — 8) « Catalizzatori e fermenti » (st.). — 9) « Sulle differenze fisico-chimiche tra i protoplasmi viventi e morti » (st.). — 10) « La fisico-chimica in patologia » (st.). — 11) « Sui fenomeni elettrici del cuore » (st.). — 12) « Sui fenomeni elettrici dello stomaco della rana » (st.). — 13) « Ricerche di elettrofisiologia secondo i criterî dell'elettrochi-

mica » (st.). — 14) « Fenomeni di polarizzazione nei muscoli » (st.). — 15) « Fenomeni elettrici dei muscoli degenerati » (st.). — 16) (e Di Cristina) « Correnti di demarcazione nei muscoli di rana in diverso modo alterati » (st.). — 17) (e Signorelli) « Influenza dell'anidride carbonica e dell'ossigeno sul cuore di rettili e di anfibii » (st.). — 18) « Sui fenomeni elettrici del cuore » (st.). — 19) « Sulla secrezione renale nelle nefriti sperimentali » (st.). — 20) « Sulle proprietà preventive e curative dei nucleoproteidi degli organi di animali immunizzati » (st.). — 21) « Sul potere vaccinante dei nucleoproteidi estratti dagli organi di animali immunizzati » (st.). — 22) « Sulle inoculazioni preventive contro la peste bubbonica » (st.). — 23) (e Polverini) « Sui primi 175 casi di peste bubbonica trattati nel 1898 in Bombay » (st.). — 24) « Il Laboratorio municipale di Bombay per la preparazione del siero contro la peste bubbonica » (st.). — 25) (e Polverini) « Osservazioni e note epidemiologiche sulla recrudescenza della epidemia di peste in Bombay » (st.). — 26) « Sulla diagnosi della peste in certe sue forme particolari » (st.). — 27) « Ricerche sui fenomeni dell'immunità in alcuni vertebrati inferiori » (st.). — 28) (e Lustig) « I nucleoproteidi bacterici » (st.). — 29) « Ricerche sulla setticemia emorragica dei bovini » (st.). — 30) « Le variazioni dell'alcalinità del sangue sulla vetta del Monte Rosa » (st.). — 31) (e Mosso) « Modificazioni del riflesso della deglutizione studiate nella capanna Regina Margherita » (st.). — 33) « Sulla trasmissione ereditaria dei caratteri acquisiti e delle malattie » (st.).

7. Lo Monaco Domenico. 1) « Sulla fisiologia di alcune delle parti più interne e meno aggredibili del cervello » (ms.).

8. Russo Achille. 1) « Prime ricerche dirette a determinare la permeabilità e le struttura istochimica della *Zona pellucida* dei mammiferi » (st.). — 2) « Differenti stati dei corpi cromatici nell'ooplasma dei mammiferi, e loro riproduzione sperimentale » (st.). — 3) « Sulla funzione di assorbimento dell'epitelio germinativo dell'ovaia dei mammiferi » (st.). — 4) « Ulteriori ricerche sulla funzione di assorbimento dell'epitelio germinativo dell'ovaia dei mammiferi » (st.). — 5) « Metodi adoperati per aumentare la produzione del sesso femminile nel coniglio, ecc. » (st.). — 6) « Modificazioni sperimentali dell'elemento epiteliale dell'ovaia dei mammiferi » (st.). — 7) « Sull'origine dei mitocondrî e sulla formazione del deutoplasma nell'oocite di alcuni mammiferi » (st.). — 8) « Sulla origine e sulla funzione dell'apparato mitocondriale nelle cellule sessuali dei mammiferi » (st.). — 9) « Per la costituzione della *Zona pellucida* e per la formazione del *liquido follicolare* nell'uovo dei mammiferi » (st.). — 10) « Azione di alcuni agenti chimici sulle cellule del tubo seminifero del coniglio » (st.). — 11) « Sopra alcuni problemi di Zoologia generale e sopra i mezzi più opportuni per risolverli » (st.). — 12) « I mitocondri ed i globuli vitellini dell'oocite di coniglio allo stato normale ed in condizioni sperimentali. Contri-

buto allo sviluppo del deutolecite ed alla differenziazione sessuale delle ova dei mammiferi » (st.). — 13) « Sulla cromolisi delle cellule della granulosa durante il digiuno, e sul suo significato nella differenziazione sessuale delle ova dei mammiferi » (st.).

Anonimo (col motto « Debierre »). 1) « Sulla cura della tifoide » (ms.).

Elenco dei lavori presentati al concorso ai premî del Ministero della P. I. per le *Scienze matematiche.*

(Scadenza 31 dicembre 1909. — Premio L. 2000).

1. Amodeo Federico. 1) « Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nell'evo antico » (st.). — 2) « Albrecht Dûrer precursore di Monge » (st.). — 3) « Sul corso di storia delle matematiche fatto nella R. Università di Napoli nel biennio 1905-1907 » (st.). — 4) « Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nel rinascimento » (st.). — 5) « Il trattato delle coniche di Francesco Maurolico » (st.). — 6) « Nuovo elenco delle opere di Giuseppe Battaglini. con cenni riassuntivi » (st.). — 7) « Sulla necessità di formare un archivio di scienze matematiche » (st.). — 8) « Appunti su Biagio Pelicani da Parma » (st.). — 9) « Bonaventura Cavalieri e la costruzione lineare delle coniche » (st.). — 10) « La regola di Fermat-Monforte per la ricerca dei Massimi e Minimi » (st.). — 11) « Riproduzione delle questioni sul Trattato *De latitudinibus formorum* di Nicole Oresme, fatte da Biagio Pelicani » (st.). — 12) « Complementi di analisi algebrica elementare » (st.). — 13) « Aritmetica ed algebra » (st.). — 14) « Aritmetica razionale particolare e generale » (st.). — 15) Aritmetica generale ed Algebra » (st.). — 16) « Aritmetica complementare partic. e gener. » (st.). — 17) « Compendio di storia delle matematiche » (ms.).

2. Benedetti Piero. 1) « Il concetto geometrico di linea » (ms.).

3. Bonola Roberto. 1) « Traduzione ed aggiunte a: *Die Nichteuklidische Geometrie* » (ms.). — 2) « Saggio d'una esposizione dei principî delle Geometrie non euclidee » (ms.). — 3) « Ricerche sui sistemi lineari di omografie nello spazio » (st.). — 4) « Sistemi lineari d'omografie piane e spaziali che formano gruppo » (st.). — 5) « Die Nichteuklidische Geometrie » (st.).

4. Caminati Pietro. 1) « Saggio di lezioni nuove di geometria piana elementare » (st.). — 2) « Terza aggiunta da farsi al saggio di lezioni nuove di geometria piana » (st.).

5. Carlini Luigi. 5) « Intorno alle soluzioni dell'equazione » (ms.).

6. Cipolla Michele. 1) « Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie. Note 1ª e 2ª » (st.). — 2) « Sulla teoria dei gruppi abeliani » (st.). — 3) « Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito. Nota 1ª e 2ª » (st.). —

4) « Specimen de calculo arithmetico-integrale » (st.). — 5) I numeri reali » (st.).

7. Cominotto Quintilio Emilio. 1) « Sistemi omociclici » (ms.).

8. Dell'Agnola Carlo Alberto. 1) « Sulla funzione limite di una successione di funzioni continue » (st.). — 2) « Le successioni di funzioni continue e il teorema di Arzelà » (st.). — 3) « Sopra alcune proporzioni fondamentali dell'analisi » (st.). — 4) « Le funzioni discontinue e il teorema di Baire » (st.). — 5) « Sul teorema di Borel » (st.). — 6) « Sulla convergenza uniforme di una successione di funzioni continue » (st.).

9. Gallucci Generoso. 1) « Geometria del tetraedro » (ms.).

10. Manfredini Giovanni. 1) « Sulla deformazione delle quadriche generali » (st.).

11. Marletta Giuseppe. 1) « Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni » (st.). — 2) « Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione » (st.). — 3) « Sulla identità cremoniana di due curve piane » (st.). — 4) « Alcuni teoremi sulle curve razionali degli iperspazî » (st.). — 5) « Sulle curve ellittiche del quinto ordine » (st.). — 6) « Sopra i complessi di rette d'ordine uno dell'S_4 » (st.).

12. Minetola Silvio [1]. 1) Sopra alcune proprietà delle operazioni di polare » (st.). — 2) « Un'equazione di condizione per i numeri primi » (st.). — 3) « Principî di analisi combinatoria con applicazione ai problemi di decomposizione e di partizione dei numeri » (st.). — 4) « Sulle combinazioni con elementi non tutti distinti » (st.). — 5) « Sui numeri primi compresi fino ad un limite assegnato » (st.).

13. Pannelli Marino. 1) « Sul genere aritmetico di una varietà completa intersezione di forme » (st.). — 2) « Sopra un carattere di una varietà algebrica a tre dimensioni » (ms.).

14. Pirondini Geminiano. 1) « Di un nuovo metodo per studiare le linee descritte sopra una superficie ecc. » (st.). — 2) « Contributo alla teoria delle caustiche ed anti-caustiche » (st.). — 3) « Una speciale trasformazione geometrica nel piano, con applicazioni » (st.). — 4) « Saggio di una teoria analitica delle linee e delle superficie non euclidee » (ms.).

15. Satta Antonio. 1) Descrizione avente per titolo: *Livello a cannocchiale con l'asse ottico collegato direttamente alla livella e con vite di elevazione* » (st.).

16. Sbrana Umberto. 1) « Sulle varietà ad $n-1$ dimensioni deformabili nelle spazio euclideo ad n dimensioni » (st.).

17. Scorza Gaetano. 1) « Intorno alle corrispondenze $(p\ p)$ sulle curve di genere p e ad alcune loro applicazioni » (st.). — 2) « Le uguaglianze e le similitudini nel piano e nello spazio » (st.). — 3) « Determinazione delle varietà a tre dimensioni di S_r $(r \geq 7)$ i cui S_3 tangenti si ta-

(1) Ammesso con riserva.

gliano a due a due » (st.). — 4) « Sopra una certa classe di varietà razionali » (st.) — 5) « Sulle varietà a quattro dimensioni di S_r ($r \geq 9$) i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due » (st.). — 6) « Un problema sui sistemi lineari di curve appartenenti a una superficie algebrica » (st.). — 7) « Le varietà a curve sezioni ellittiche » (st.). — 8) « Le superficie a curve sezioni di genere 3 » (ms.). — 9)) « Sulle varietà di *Segre* » (ms). — 10) « Lezioni di algebra e trigonometria ecc. » (ms.).

18. Sforza Giuseppe. 1) « Corpi rotondi e baricentro nella metrica proiettiva » (st.). — 2) « Sull'estensione ipersferica di Luigi Schläfli » (st.). — 3) « Formula fondamentale pel calcolo dei volumi poliedrici non euclidei » (st.). — 4) « Sopra alcuni punti dell'estensionimetria non euclidea » (st.). — 6) « Ricerche di estensionimetria negli spazî metrico-proiettivi » (st.).

19. Suini Alessandro. 1) « Le teorie delle Serie, delle Quantità incommensurabili degli Irrazionali e dei Limiti » (st.).

20. Vitali Giuseppe. 1) « Sull'integrazione per serie » (st.). — « Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali » (st.).

Elenco dei lavori inviati per la Fondazione *Santoro*.

1. Gabrielli Alessandro. 1) « Sulle equazioni del 2° grado » (ms.). — 2) « Sulle equazioni del 3° grado » (ms.).

2. Gorini Costantino. 1) « Studî sui batterii del latte » (37 pubblizioni).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 16 gennaio 1910.

Boletin anual del Observatorio Meteorológico de Cartuja (Granada). Año de 1908. Granada, 1909. 4°.

Bourdariat A. e Johnston-Lavis H. J. — Note sur le remarquable Volcan de Tritriva au centre del'île de Madagascar, avec des Observations sur l'origine du Quartz dans les basaltes et autres roches basiques. (Extr. du « Bulletin de la Soc. Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie ». Bruxelles. T. XXII, Mémoires). Bruxelles, 1909. 8°.

Flores E. — Notizie sui depositi degli antichi laghi di Pianura (Napoli) e di Melfi (Basilicata) del prof. H. J. Johnston-Lavis, e sulle ossa di Mammiferi in essi rinvenute. (Estr. d. « Bollettino della Soc. Geologica Italiana », v. XIV, 1895). Roma, 1895. 8°.

Lavis Ant^a^. e Johnston-Lavis H. J. — Bibliography of the Geology and eruptive phenomena of the South italian volcanoes that were visited in 1889 as well as of the submarine volcano of A. B. 1831, from the South italian volcanoes etc. Naples, 1891. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — De la rélation existant entre l'activité du Vésuve et certains phénomènes météorologiques et astronomiques. (Extr. du « Bulletin de la Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie », t. XXI, 1907). Bruxelles, 1907. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Du Rôle des Mollusques Alimentaires dans la propagation des infections gastro-intestinales (Fièvre typhoïde, Choléra, etc.). Mésures prophylactiques. Lyon, 1895. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Eozoonal Structure of the ejected Blocks of Monte Somma. (The Scientific Transactions of the Royal Dublin Society, vol. V er. II). Dublin 1894. 4°.

Johnston-Lavis H. J. — Excursion to the South italian Volcanoes. The round Trip in detail. Naples. 1891. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Fifty Conclusions relating to the eruptive phenomena of Monte Somma, Vesuvius and volcanic action in general. Napoli, 1896. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Il Pozzo artesiano di Ponticelli (1886). (Estr. dal Rend. della R. Accad. delle Scienze Fisiche e matemat. di Napoli, fasc. 6, giugno 1889). S. l. neque d. 4°.

Johnston-Lavis H. J. — L'eruzione del Vesuvio del 7 giugno 1891. (Estr. dalla « Rassegna di Scienze Geologiche in Italia », an. I). Roma, 1891. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Liste des Travaux-Scientifiques du D^r^ H. J. J.-L., 1876-1895. Lyon, 1895. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Note sur le remarquable Volcan de Tritriva au centre de l'île de Madagascar, avec des Observations sur l'origine du Quartz dans les basaltes et autres roches basiques. (Extr. du Bullettin de la Soc. Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie, Bruxelles. T. XXII, Mémoires). Bruxelles, 1909. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Notes on the Geography, Geology, Agriculture, and economics of Iceland. (Extr. « The Scottish Geographical Magazine, 1895). S. l. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Notes on the Pipernoid Structure of Igneous Rocks. (Extr. from « Natural Science », vol. III, 1893). London, s. d. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Notes on the Eruption of Vesuvius April 1906. (Estr. d. « Nature », v. 74). S. l. nec d. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — On Chlormanganokalite, a new Vesuvian mineral; with notes on some of the associated

minerals. (Estr. d. « Mineralogical Magazine, 1908, v. XV). S. l. nec d. 8°.

Johnston-Lavis J. — Osservazioni geologiche lungo il tracciato del grande Emissario-Fognone di Napoli dalla Pietra fino a Pozzuoli. (Estr. d. « Bollettino del R. Comitato Geologico », 1890). Roma. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Report of the Committee, consisting of Messrs. H. Bauerman, F. W. Rudler, and J. J. H. Teall, and Dr H. J. Johnston-Lavis appointed for the investigation of the Volcanic Phenomena of Vesuvius and its Neighbourhood. Report. 1980, '90, '92, '94. London, s. d. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Some Truths about Vittel Contresseville and Martigny. Practical Hints to my Medical Brethren. (Estr. dal « Journal of Balneology and Climatology », 1906). London. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Su una roccia contenente leucite trovata sull'Etna. (Estr. d. « Bollettino della Società italiana dei Microscopisti », Acireale, v. I). Napoli, 1888. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Sulla inclusione di Quarzo nelle lave di Stromboli ecc. e sui cambiamenti da ciò causati nella composizione della lava. Roma, 1894. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Sur une plateforme néolithique à Beaulieu (Alpes Maritimes). (Extr. du Compte Rendu de la XIIIe Session du Congrès intern. d'Anthropologie et d'Archéologie préhistoriques, Monaco, 1906). S. loco nec d. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — The Basic eruptive Rocks of Gran (Norway) and their interpretation. A Criticism. (Estr. dal « Geological Magazine », 1894). Hertford. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — The ejected Blocks of Monte Somma. Part I. Stratified Limestones. (Estr. d. « Transactions » of the Edinburgh Geological Society, v. VI, 1893). S. l., 1893. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — The Highwood Mountains of Montana and Magmatic Differentiation. A Criticism. (Estr. d. « Report of the Liverpool Meeting », 1896). S. l. né d. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — The mechanism of Volcanic Action. Being the opening address to section III (Vulcanology) of the international geographical Congress). London, s. d. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — The prescribers Guide to the Harragate Mineral Waters. London, 1892. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — The ttate of the active Sicilian Volcanoes in September 1889. (Estr. d. « The Scottish Geographical Magazine », 1890). S. l. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Volcans et tremblement de terre. (Extr. de l' « Annuaire Géologique Universel », t. V. 1888; idem, v. VI, 1889). Paris, 1889-1901. 8°.

Meli R. — Breve Relazione sulla qualità delle roccie incontrate nella perforazione della Galleria di Montorso, (Ferrovia direttissima Roma-Napoli), dall'imbocco Napoli fino alla progressiva 1380 metri. Roma, 1909. 8°.

Meli R. — Sopra alcune vedute prospettiche della città di Narni dei secoli XVII e XVIII, con pochi cenni sulle notizie stampate intorno a questa città in talune opere geografiche della stessa epoca. (Estr. dal « Bollett. della Soc. Geogr. ital. », fasc. X, 1909). Roma, 1909. 8°.

Perotti R. — Sul ciclo biochimico dell'anidride fosforica nel terreno agrario. (Memorie della R. Stazione di Patologia vegetale. — Laboratorio di Bacteriologia agraria — Roma). Roma, 1909. 4°.

Tommasina T. — Nouveaux appareils et dispositifs pour l'étude des phénomènes séismiques. (Extr. de la « Revue Polytechnique », n. 236, 1909). Crêts de Champel près Genève, 1909. 4°.

Tommasina T. — Physique de la Gravitation universelle basée sur l'action exclusive des forces Maxwell-Bartoli. Notes I-XXV. Genève, 1908-09. 8°.

TURATI E. — Nuove forme di Lepidotteri. Note I-III. (Estr. dal « Naturalista Siciliano », anni XVIII, XX, XXI, 1909). Palermo, 1905-9. 8º

VALENTINI C. — Sulla sistemazione dei torrenti. (Estr. dal « Giornale del Genio civile », anno 1893). Roma, 1893. 8º.

VALENTINI C. — Del modo di determinare il profilo di compensazione e sua importanza nelle sistemazioni idrauliche. Milano, 1895. 8º.

VALENTINI C. — La Previsione delle piene del Po. Roma, 1903. 8º.

VALENTINI C. — Service hydrométrique des Crues et des Étiages. Rapport. (XI Congr. Pietroburgo, 1908). Bruxelles, 1907. 8º.

VALENTINI C. — Sistemazione dei fiumi a fondo mobile a scopo di navigazione. (XII Congresso degli Ingegneri e Architetti italiani, 1909). Roma, 1909. 8º.

VALENTINI C. — Sui fenomeni torrentizî. Conferenza. Roma, 1909. 8º.

VALENTINI C. — Conferenze tecniche. N. 3. Sulla navigazione interna nell'Europa centrale. (Scuola di Applicazione per gli Ingegneri, R. Univ. di Padova). Roma, 1909. 8º.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE

DELLA UNIVERSITÀ DI ROSTOCK.

ABRAHAM F. — Beiträge zur Kenntniss der 4-Amidopyrazole. Rostock, 1909. 8º.

ALTSTAEDT E. — Die Hämophilie im Lichte der genealogischen Forschung. Rostock, 1908. 8º.

BARFURTH W. — Ueber Hyperdaktylie, Rostock, 1909. 8º.

BARTELS W. — Die Gestalt der Deutschen Ostseeküste. Stuttgart, 1908. 8º.

BAUM H. — Ueber das 1 Phenyl-3 Essigsäure- 5 Pyrazolon und dessen Derivate. Rostock, 1908. 8º.

BERNHEIM W. — Die Erysipeltherapie. Rostock, 1909. 8º.

BOSZ J. E. — Ueber die Pyrine des 1-Benzyl-3-Methyl-5 Pyrazolons. Rostock, 1908. 8º.

BREHMER K. — Beitrag zur atmosphärischen Refraktion über Wasserflächen. Berlin, 1909. 4º.

BULLY M. — Diagnostische Symptome bei 96 in der Rostocker Medizinischen Klinik beobachteten Typhusfällen. Rostock, 1909. 8º.

DEFFGE F. — Einige Beobachtungen über Bromural. Waren, 1908. 8º.

DIERLING H. — Beiträge zur Kenntnis der Schmerzen im Ohre und am Warzenfortsatze bei Hysterischen. Rostock, 1908. 8º.

ECKENBERG W. B. — Ueber in der Phenylgruppe substituierte 1-Phenyl-5-methyl-3-pyrazolone. Rostock, 1909. 8º.

EICHSTEDT K. — Zur Frage der Gemeingefährlichkeit bei Geisteskranken. Rostock, 1909. 8º.

FRANK A. — Beiträge zur Lehre von den Schädelsarkomen. Rostock, 1909. 8º.

FRANKE E. — Zur Bakteriologie der akuten und chronischen Appendizitis mit besonderer Berücksichtigung des peritonealen Exsudats. Leipzig, 1908. 8º.

FRIDERICI E. — Ueber stereoisomere β-Arylzimmtsäuren. Rostock, 1908. 8º.

GRAEF W. — Ueber die Ergebnisse der in dem Zeitraume vom 1. Juli 1906 bis 30. Juni 1908 zum Zwecke der Erforschung und Bekämpfung der übertragbaren Genickstarre ausgeführten Untersuchungen. Rostock, 1909. 8º.

GRONAU H. — Beitrag zur Frage der wirt-

schaftlichen Folgen nicht im Betriebe entstandener körperlicher Schädigungen. Rostock, 1908. 8°.

Grünberg K. — Beiträge zur Kenntnis der Labyrintherkrankungen. Wiesbaden, 1909. 8°.

Hadank E. — Untersuchungen über das 1-3-Dimethyl-5-Pyrazolon und andere Condensationsprodukte des Methylhydrazins. Rostock, 1908. 8°.

Himmelfarb G. — Ueber stereoisomere Verbindungen aus der Gruppe des Diphenylpropylens. Rostock, 1908. 8°.

Hofstaetter G. — Ein Fall von operativ behandeltem echinococcus cerebri. Rostock, 1909. 8°.

Jecke R. H. — Beiträge zur Geometrie der Bewegung. Berlin, 1909. 8°.

Johannsen D. — Ueber Thiopyrazolone. Esens, 1909. 8°.

Klewitz A. — Ueber die Einwirkung von Säurechloriden auf einige aromatische Säuren und deren Ester. Rostock, 1908. 8°.

Kluth K. — Beitrag zu einer allgemeinen Entwicklungstheorie. Rostock, 1908. 8°.

Kobert K. — Ueber 25-Phenyl-Hydrazino-Pyrine und über 1-Phenyl-3-Methyl-Pyrazol-5-Azo-Benzol. Rostock, 1909. 8°.

Koenig G. A. K. — Beiträge zur Kenntnis der Achylia gastrica nach den in der Rostocker medizinischen Klinik und Poliklinik in den letzten beiden Jahren gemachten Beobactungen. Kiel, 1909. 8°.

Lange M. — Vereinfachte Formeln für die trigonometrische Durchrechnung optischer Systeme. Leipzig, 1909. 8°.

Leo J. F. — Beiträge zur Kenntnis der Anhydride der Carboxylphenyl-5-Pyrazolone. Rostock. 1908. 8°.

Mahlow F. — Ueber Thioderivate des Chinolins und Chinaldins. Rostock, 1909. 8°.

Martini E. — Ueber Subcuticula und Seitenfelder einiger Nematoden nebst Bemerkungen über determinierte Entwicklung. Leipzig, 1908. 8°.

Meyer H. — Bericht über 90 Friedens-Schussverletzungen. Rostock, 1909. 8°.

Müller G. F. W. — Kasuistische Beiträge zur Unfalls-Hysterie. Rostock, 1909. 8°.

Nordalm K. — Beitrag zur allgemeinen progressiven Paralyse der Jrren im jugendlichen Alter. Rostock, 1909. 8°.

Pflaum H. — Versuche mit einer elektrischen Pfeife. Braunschweig, 1909. 8°.

Press U. — Ueber Neuronal und Proponal. Leipzig, 1908. 8°.

Quilitz W. — Die Entwicklung und der heutige Stand der Lehre von der Tetaniekatarackt. Rostock, 1908. 8°.

Rathenow E. — Ein seltener Fall von traumatischer Ureterverletzung mit Fistelbildung. Rostock, 1908. 8°.

Richartz A. — Ueber Dichlor- und Halogenamino-Chloracetylbenzole und deren Derivate. Rostock, 1908. 8°.

Rosenmüller M. — Ueber Emission und Absorption des Kohlelichtbogens. Rostock, 1909. 8°.

Schenk K. — Ueber eine neue allgemein anwendbare Synthese von 3-5-Pyrazolidonen sowie Untersuchung einiger in 4-Stellung alkylierter Verbindungen dieser Reihe. Rostock, 1908. 8°.

Schmidt G. L. — Ueber die Tagesschwankungen der Zahl der Leukozyten und deren Beeinflussung durch Phagocytin (nucleinsaures Natrium). Rostock, 1909. 8°.

Schmidt O. — Zur Kenntnis der Pyrazole und ihrer Stellung in der organischen Chemie. Rostock, 1908. 8°.

Schultze H. — Zur Frage der Erschöpfungszustände der Schuljugend. Rostock, 1908. 8°.

Sebba M. — Beiträge zur Kenntnis der Stimmbandlähmungen. Rostock, 1908. 8°.

Stahl W. — Ueber Fädchen-Keratitis nebst Mitteilung eines anatomisch untersuchten Falles. Rostock, 1908. 8°.

Sydow H. (v.). — Ueber Eisenbahnfrevel durch Geisteskranke. Rostock, 1908. 8°.

Thierfelder M. — Beiträge zur Lehre vom Trachom. — I. Das Trachom in Mecklenburg von 1902 bis 1907 inkl. — II. Untersuchungen über das Vorkommen der sog. Körperchenzellen bei Trachom. Rostock, 1909. 8°.

Ullmann A. — Ueber primäres Netzsarkom. Rostock, 1909. 8°.

Vogt L. — Wanderniere (Ren mobilis). Rostock, 1909. 8°.

Voigt A. — Versuche zum Aufbau einer Isocumarilsäure u. Isocumaranilsäure. Rostock, 1908. 8°.

Voss U. — Die Parinaud'sche Conjunctivitis. Rostock, 1908. 8°.

Wada Y. — Ueber die Hypertrichosis sacro-lumbalis mit Spina bifida occulta. Rostock, 1908. 8°.

Weise F. — Ueber die Osteomyelitis des Oberkiefers besonders im frühen Kindesalter. Rostock, 1907. 8°.

Witt E. — Ausbreitung der Stirnhöhlen und Siebbeinzellen über die Orbita. Wiesbaden, 1908. 8°.

Wittig W. C. — Zur akuten infektiösen Osteomyelitis der kleinen Röhrenknochen, speziell der Phalangen. Rostock, 1909. 8°.

Wulle E. — Ueber Acetyl-Kylylcyanide und einige Glyoxyltolylessigsäuren. Rostock, 1909. 8°.

Zehden A. — Ueber die relative Helligkeit der Farben elektrisch glühender Gase bei Wechsel von Druck und Stromstärke. Rostock, 1909. 8°.

Zschiesche A. — Untersuchungen über die Metamorphose von Alcyonidium mytili. Naumburg, 1909. 8°.

E. M.